

Vzdelávací štandard

a Cieľové požiadavky na maturitu z matematiky

Úvod

Dynamické technologické a spoločenské zmeny zásadne transformovali spôsoby využívania matematiky v praxi. Tým prirodzene zvýšili nároky na matematickú gramotnosť celej populácie. Tieto zmeny reflektuje kurikulárna reforma na základnej škole a predkladané vzdelávacie štandardy z matematiky pre stredné školy na ňu nadväzujú. Sú koncipované tak, aby všetci žiaci, bez ohľadu na svoje ďalšie smerovanie, dokázali efektívne profitovať zo získaného matematického poznania. Zároveň pripravujú budúcich študentov STEM odborov na vysokoškolské štúdium. To je podmienené nielen rozvinutým matematickým myslením a primeranou matematickou zručnosťou, ale predovšetkým hlbokým porozumením matematike ako tvorivej ľudskej aktivite zameranej na budovanie porozumenia kvantitatívnym a štrukturálnym javom.

Naplnenie takéhoto cieľa vyžaduje vyrovnať sa s vnímanou *náročnosťou* matematiky, ktorej príčina spočíva najmä v jej abstraktnosti, sprevádzanej opakovaným nárastom komplexnosti. Avšak práve tieto črty matematiky sú tiež podstatou jej *krásy* a *užitočnosti*. Stredoškolské matematické kurikulum má zabezpečiť, aby komplexnosť matematiky nebola pre žiakov bariérou v jej využívaní pri riešení otázok bežného života či pracovných výziev naprieč rôznymi zamestnaniami. Aktívnym žiackym bádáním, argumentovaním, zovšeobecňovaním, modelovaním realistických situácií má vytvárať priestor, kde žiaci napriek jej náročnosti budú môcť matematike porozumieť, zažívať „aha“ momenty, objavovať a oceňovať jej krásu. Vzdelávací štandard preto musí citlivo narábať s nárastom a mierou abstrakcie, ktorú žiakom predkladá, aby matematika, ktorú majú žiaci zvládnuť, mohla byť produktom ich matematických aktivít v triedach.

Z vyššie uvedených argumentov vyplýva potreba dvojúrovňového modelu matematického kurikula, ktorý rozlišuje základnú a **pokročilú** úroveň. Tieto úrovne sa odlišujú najmä mierou abstrakcie, očakávaniami na procedurálnu plynulosť (t. j. presné, rýchle a adekvátne zvládanie algoritmov a automatizáciu výpočtových zručností), zvládnutím terminológie a symboliky a v niektorých prípadoch aj rozsahom obsahových požiadaviek. Diferenciácia úrovní zároveň zohľadňuje potreby žiakov a ich budúce profesijné smerovanie.

Základná úroveň je určená pre všetkých žiakov ako súčasť všeobecného vzdelania. Je zameraná na rozvoj matematickej gramotnosti, porozumenia základným pojmom, postupom a reprezentáciám, na schopnosť používať matematiku v bežných životných a pracovných situáciách, potrebných pre občianske fungovanie a štúdium smerov, ktoré nevyžadujú pokročilú matematiku. Poskytuje aj základ pre využitie elementárnych matematických poznatkov v rámci odborného vzdelávania.

Pokročilá úroveň je určená pre žiakov, ktorí plánujú pokračovať v štúdiu technických, prírodovedných, ekonomických alebo matematických odborov. Je zameraná na kultivovanie spôsobu matematického vyjadrovania, používanie matematickej symboliky, porozumenie princípom dôkazov a využívanie pokročilých matematických nástrojov na modelovanie realistických situácií. V porovnaní so základnou úrovňou sa vyznačuje vyššou mierou komplexnosti, abstrakcie a formalizácie poznatkov.

Pre základnú úroveň je vyhradených 12 h, pre pokročilú 18 h. Vzdelávací štandard počíta s voľnosťou do 5 % pre zaradenie tém špecifických pre zameranie školy, alebo priestor na prehĺbenie vybraných častí učiva. Odporúčame používanie matematických symbolov podľa európskej normy č. ISO 80000-2 z roku 2019. Cieľom týchto zmien nie je znížiť nároky na vedomosti z matematiky, naopak, ide o to, aby matematika bola zrozumiteľnejšia, zmysluplnejšia a využiteľnejšia pre všetkých žiakov.

Matematický obsah je v tomto dokumente členený na štyri obsahové komponenty, ktoré sa vzájomne prelínajú a neurčujú poradie preberania jednotlivých tém:

- | | | | |
|--|--|--------------------------------|---|
| 1. <u>Čísla, výrazy a operácie s nimi:</u> | 2. <u>Závislosti, funkcie a práca s údajmi:</u> | 3. <u>Geometria a meranie:</u> | 4. <u>Základy formálnej matematiky:</u> |
| 1.1. Množstvá, čísla a ich vlastnosti | 2.1 Funkcia ako matematický objekt, jej vlastnosti a transformácie | 3.1 Planimetria | 4.1 Výroky, kvantifikátory, úsudky |
| 1.2. Určovanie počtu prvkov konečných množín (Kombinatorika) | 2.2 Modely zmien a rastu | 3.2 Trigonometria | 4.2 Množiny a operácie s nimi |
| 1.3. Výrazy a ich ekvivalencia | 2.3 Periodické deje a cyklickosť | 3.3 Stereometria | 4.3 Základné typy dôkazov |
| 1.4. Rovnice a nerovnice | 2.4 Pravdepodobnosť | 3.4 Analytická geometria | |
| | 2.5 Štatistika | | |

Obsahový komponent *Čísla, výrazy a operácie s nimi* je zameraný na rozvoj porozumenia vyčísľovaniu kvantitatívnych javov a vyjadrovania početnosti. Poskytuje príležitosti na systematickú organizáciu javov, ktoré chceme kvantifikovať, na prehľbovanie práce s algebraickými výrazmi, riešenie rovníc, nerovníc a ich sústav. Dôraz sa kladie na užitočnosť neformálneho a presnosť symbolického zápisu, efektívnu stratégiu matematických úprav, analýzu podmienok riešiteľnosti a interpretáciu výsledkov v kontexte problému. Komponent podporuje rozvoj systematickej organizácie situácií a algebraického myslenia, schopnosť zovšeobecňovať a využívať numerické a algebraické nástroje pri tvorbe a používaní modelov a pri riešení úloh z rôznych oblastí praxe.

Obsahový komponent *Závislosti, funkcie a práca s údajmi* je zameraný na rozvoj funkčného a pravdepodobnostného myslenia, formalizáciu a analýzu funkčných vzťahov a štatistických údajov. Žiaci skúmajú elementárne funkcie, analyzujú ich vlastnosti a interpretujú ich grafické a analytické reprezentácie. V rozvoji pravdepodobnostného myslenia modelujú náhodné javy, analyzujú priestor možných výsledkov a kvantitatívne vyjadrujú mieru pravdepodobnosti javov. Rozšírenie vyučovania pravdepodobnosti súvisí s jej využitím pri generatívnych modeloch umelej inteligencie. V oblasti práce s údajmi sa dôraz kladie na systematický zber, spracovanie a interpretáciu dát, využívanie štatistických charakteristík, pravdepodobnostné modelovanie a kritické posudzovanie výsledkov. Komponent rozvíja schopnosť matematicky modelovať reálne situácie, overovať primeranosť modelu, interpretovať výsledky v kontexte a zdôvodňovať ich.

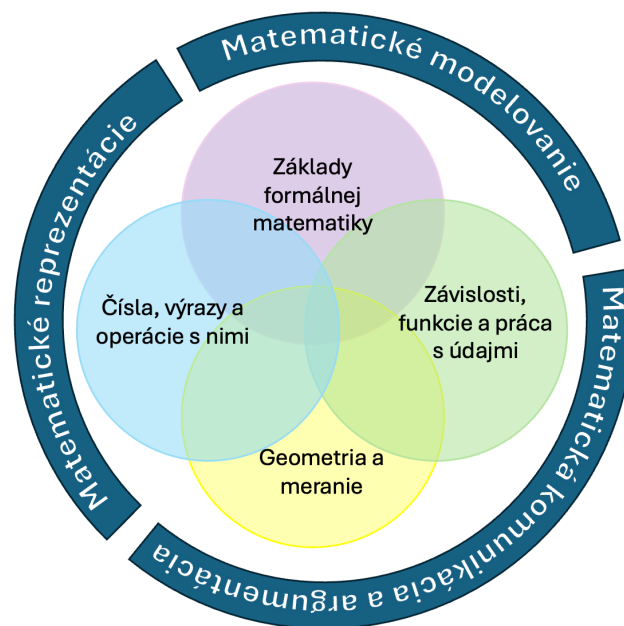
Obsahový komponent *Geometria a meranie* rozvíja geometrické myslenie. Žiaci skúmajú vlastnosti rovinných a priestorových útvarov, ich vzájomné vzťahy a transformácie, pričom využívajú syntetický aj analytický prístup, vrátane analytickej geometrie v rovine a priestore. Dôraz sa kladie na argumentáciu, využívanie geometrických zobrazení a riešenie polohových a metrických úloh. Na pokročilej úrovni aj dôkaz vybraných tvrdení. Komponent podporuje schopnosť vizualizácie, abstrakcie a aplikácie geometrických poznatkov v technických, prírodovedných a ďalších odborných kontextoch.

Obsahový komponent *Základy formálnej matematiky* je zameraný na budovanie porozumenia matematike ako formálnemu deduktívnemu systému. Komponent úzko súvisí s praktikou *Matematický jazyk, komunikácia a argumentácia*, rozvíja schopnosť presnej formulácie pojmov, práce s definíciami a logickej argumentácie. Podporuje kritické posudzovanie úsudkov a uvedenie si vnútorných vzťahov medzi matematickými objektmi a ich vlastnosťami. Na pokročilej úrovni buduje aj porozumenie štruktúre matematického dôkazu. Vytvára základ pre ďalšie matematické disciplíny tým, že rozvíja schopnosť abstraktného myslenia, presného matematického jazyka a dôsledného zdôvodňovania tvrdení.

Viacere témy prirodzene presahujú hranice jednotlivých komponentov. Napríklad exponenciálne rovnice sú zaradené do komponentu *Čísla, výrazy a operácie s nimi*, no zároveň je prirodzené venovať sa im pri preberaní exponenciálnej funkcie v komponente *Závislosti, funkcie a práca s údajmi*. Podobne komponent *Základy formálnej matematiky* obsahuje základy výrokovej logiky a princípy dokazovania, ktoré sa postupne budujú a uplatňujú vo všetkých ostatných komponentoch. Je preto dôležité vnímať vzájomné vzťahy a súvislosti medzi jednotlivými komponentmi a uvedomiť si, že vzdelávací štandard neurčuje poradie preberania tém.

Osvojenie matematických vedomostí a zručností je ovplyvnené matematickým obsahom a didaktickými postupmi, ktorými je obsah sprístupňovaný. *Obsah matematického vzdelávania* tvorí súbor matematických poznatkov, ktoré môžeme zaradiť do troch skupín:

- (1) *Pojmy* – súbor nových, doteraz aktívne neosvojených matematických pojmov, prípadne prehĺbenie komplexnosti už známych pojmov, ktoré vyžaduje napredovanie v obsahu učiva. Význam, hĺbka a spôsob porozumenia sú špecifikované v *matematických praktikách*. Ovládanie pojmov znamená:
 - žiak rozumie zadaniam úloh, v ktorých sa tieto pojmy vyskytujú,
 - žiak vie správne použiť pojmy pri formuláciách svojich odpovedí,
 - len ak to praktika vyžaduje, žiak vie pojmy opísať, vysvetliť, alebo definovať.
- (2) *Vzťahy* – matematické vzorce, vlastnosti a tvrdenia, ktoré sa v obsahu využívajú. Podobne ako pri pojmoch, aj tu je potrebné čítať ich v kontexte matematických praktík. Žiaden vzťah nemá žiak ovládať bez aspoň základného porozumenia. Ak vyslovenie, odvodenie či dokázanie tvrdenia nie je uvedené v matematických praktikách, nie je potrebné to od žiakov vyžadovať.
- (3) *Postupy* – osvojené a zautomatizované algoritmy a metódy riešenia úloh. Porozumenie postupom a posudzovanie ich adekvátnosti, či relatívnej efektívnosti, predchádza automatizácii. V tejto skupine je potrebné podrobne čítať a vnímať aj obmedzenia v náročnosti. Kurikulum sa snaží eliminovať drilovanie a nacvičovanie tých algoritmov, ktoré nie sú potrebné pre ďalšie zvládnutie učiva.



Obrázok 1. Mapa obsahových komponentov v matematickom vzdelávaní

Matematické praktiky, podobne ako v kurikule pre základné školy, kategorizujeme do troch skupín:

- (1) *Matematické reprezentácie* – rozvíjajú schopnosť vytvárať a prepájať rôzne formy zobrazenia matematických objektov a vzťahov, porozumieť im a cielene vyberať vhodnú reprezentáciu v danom kontexte. Na úrovni strednej školy sa dôraz kladie najmä na symbolické a grafické reprezentácie a na schopnosť prechádzať medzi nimi, interpretovať ich význam a posudzovať ich primeranosť vzhľadom na riešený problém. V pokročilej úrovni sú reprezentácie abstraktnejšie, využitím formálneho zápisu.
- (2) *Matematické modelovanie* – vedie žiakov k systematickému riešeniu problémov vychádzajúcich aj z realistických situácií: od analýzy zadania, cez jeho matematizáciu a spracovanie, až po interpretáciu a kritické zhodnotenie výsledkov. Realistická situácia v tomto kontexte nepredstavuje len úlohu zo života, ale zmysluplný, pre žiaka predstaviteľný problém (či už z oblasti financií, vedy, alebo techniky), ktorý slúži ako prirodzený štartovací bod pre postupné objavovanie a budovanie formálnych matematických pojmov. Súčasťou je vedomé využívanie vhodných matematických alebo digitálnych nástrojov a posudzovanie obmedzení zvoleného či vytvoreného modelu, ako aj vhodnosti modelu pre iné kontexty a situácie. V pokročilej úrovni je modelovanie smerované na komplexnejšie problémy prepájajúce aj viaceré obsahové komponenty.

- (3) *Matematická komunikácia a argumentácia* – v prvom rade rozvíja porozumenie matematickému jazyku, následne jeho presné používanie a schopnosť aplikovať tento jazyk. Súčasťou sú skúsenosti s potrebou jasne formulovať postupy a závery, vecne obhajovať tvrdenia, či vznášať voči tvrdeniam námietky. Dôraz sa kladie na logickú konzistentnosť, štruktúru argumentácie a kritické posudzovanie matematických tvrdení v odbornom aj spoločenskom kontexte. V základnej úrovni argumentácia nadobúda podobu jednoduchých neformálnych zdôvodnení aj v konkrétnych prípadoch, argumentovanie využitím platných tvrdení, a v pokročilej úrovni je posunutá k tvorbe formálnych dôkazov, precíznemu používaniu symbolických zápisov a k definovaniu vybraných pojmov.

Tento dokument zahŕňa *vzdelávací štandard* aj *cieľové požiadavky na maturitu*. Bežný text predstavuje požiadavky základnej úrovne maturitnej skúšky a je určený pre všetkých žiakov. Text zvýraznený **tučným písmom** predstavuje požiadavky, ktoré pribúdajú navyše pre **pokročilú úroveň** maturitnej skúšky.

Ciele predmetu

1. *Rozvíjať matematickú gramotnosť, ochotu a schopnosť používať matematiku v rôznych životných, spoločenských a odborných situáciách* – žiaci majú porozumieť základným matematickým pojmom a matematickým objektom, ktoré tieto pojmy popisujú. Majú porozumieť vzťahom a postupom tak, aby si vybudovali záujem a schopnosť využívať ich pri riešení problémov každodenného života, pri interpretácii údajov, rozhodovaní a modelovaní realistických situácií. Matematika sa má pre nich stať prirodzeným nástrojom orientácie v súčasnom svete založenom na dátach, technológiách a kvantitatívnych informáciách.
2. *Rozvíjať matematické myslenie založené na abstrahovaní, argumentácii, zovšeobecňovaní a dokazovaní* – vzdelávanie má viesť žiakov k chápaniu matematiky ako tvorivej ľudskej aktivity zameranej na budovanie a prehľbovanie porozumenia kvantitatívnym a štruktúrnym javom. **Na pokročilej úrovni žiaci začínajú interagovať s matematikou organizovanou ako logicky usporiadaný deduktívny systém.** Žiaci si majú rozvíjať schopnosť presne formulovať pojmy, analyzovať vzťahy medzi matematickými objektmi, kriticky posudzovať tvrdenia, identifikovať logické chyby a primerane veku vytvárať a hodnotiť matematické argumenty a dôkazy.
3. *Rozvíjať schopnosť matematicky reprezentovať, modelovať a riešiť problémy* – žiaci si rozvíjajú schopnosť prepájať symbolické, grafické, numerické, geometrické a verbálne reprezentácie matematických objektov a situácií. Majú získavať schopnosť analyzovať problémy, vytvárať a testovať matematické modely, využívať vhodné stratégie a digitálne nástroje, interpretovať výsledky, kriticky posudzovať ich adekvátnosť ako aj primeranosť zvolených postupov.
4. *Kultivovať presné matematické vyjadrovanie a budovať procedurálnu plynulosť* – žiaci majú rozvíjať schopnosť jasne komunikovať matematické myšlienky, zdôvodňovať svoje postupy a vecne obhajovať závery. Prostredníctvom bohatej matematickej komunikácie v triede majú zvládnuť efektívne používanie matematických postupov, algoritmov, symboliky a terminológie s dôrazom na presnosť, logickosť, porozumenie významu symbolov a primeranú mieru automatizácie.

5. *Vytvárať podmienky pre hlboké porozumenie matematike a diferencovaný rozvoj žiakov podľa ich vzdelávacích a profesijných potrieb* – matematické vzdelávanie má byť prístupné a zmysluplné pre všetkých žiakov, pričom má rešpektovať rozdielne budúce študijné a profesijné smerovanie. Základná úroveň má zabezpečiť všeobecnú matematickú gramotnosť a pripravenosť na občiansky a pracovný život, zatiaľ čo **pokročilá úroveň má pripravovať žiakov na štúdium STEM a príbuzných odborov prostredníctvom vyššej miery abstrakcie, formalizácie, a tým aj matematickej náročnosti.**

Výkonový štandard

Čísla, výrazy a operácie s nimi

Cieľ Č.1: Rozvíjať schopnosť pracovať s číslami v rôznych tvaroch a posudzovať primeranosť presnosti výpočtov v realistických situáciách a **rozšírenie pochopenia princípu sčítania v pozičnej sústave**

Žiak vie/dokáže:

- riešiť a vysvetľovať problémy využitím vlastností reálnych čísel a operácií s nimi v rôznych zápisoch, vrátane vedeckého zápisu,
- rozhodnúť o vhodnosti použitia presných alebo približných hodnôt pri výpočtoch a zhodnotiť možný vplyv chyby na výsledok,
- porovnávať reálne čísla v rôznych zápisoch a interpretovať ich vzájomné vzťahy v kontexte danej situácie,
- vysvetliť princíp zápisu v pozičnej sústave a **na základe toho prepísať číslo z pozičnej sústavy s iným základom ako 10 do desiatkovej sústavy a naopak,**
- **vysvetliť princíp sčítania v pozičnej sústave.**

Cieľ Č.2: Systematicky určovať počet možností v rôznych situáciách a používať vhodné kombinatorické stratégie.

Žiak vie/dokáže:

- analyzovať pravidlá výberu (závislosť od poradia, možnosť opakovania) a efektívne používať kombinatorické pravidlá súčtu a súčinu v situáciách, kde je mechanické vypisovanie neprehľadné a neefektívne,
- vyčíslíť všetky možnosti bez ich vynechania či opakovania.

Cieľ Č.3: Porozumieť vlastnostiam prirodzených čísel a využiť deliteľnosť pri riešení matematických a realistických problémov.

Žiak vie/dokáže:

- zvoliť efektívny spôsob nájdenia NSD a NSN a aplikovať ho pri riešení realistických úloh,
- vysvetliť kritériá deliteľnosti a aplikovať ich v úlohách s rôznym kontextom,
- formulovať a odôvodniť jednoduché tvrdenia o deliteľnosti prirodzeným číslom.

Cieľ Č.4: Využívať rovnice a nerovnice na modelovanie a riešenie problémov a interpretovať ich riešenia v kontexte.

Žiak vie/dokáže:

- zostaviť rovnicu, nerovnicu, alebo ich sústavu ako model realistickej situácie, zdôvodniť postup jej riešenia a interpretovať výsledok i počet riešení vzhľadom na kontext problému,
- **riešiť úlohy lineárnej optimalizácie a posúdiť vplyv parametrov na celkové riešenie.**

Závislosti, funkcie a práca s údajmi

Cieľ F.1: Rozvíjať funkčné myslenie pri modelovaní závislostí, skúmaní zmien a interpretácii vzťahov medzi veličinami v rôznych kontextoch vrátane finančnej matematiky.

Žiak vie/dokáže:

- identifikovať funkciu ako pravidlo priradenia medzi vstupom a výstupom, ako vyjadrenie vzájomnej zmeny veličín (kovarianciu) a ako jednoznačný vzťah medzi prvkami dvoch množín (korešpondenciu),
- skúmať funkciu ako matematický objekt, analyzovať jej vlastnosti, využívať tieto vlastnosti pri riešení rovníc, nerovníc, a pri transformáciách a operáciách s funkciami,
- interpretovať, využívať a prepájať rôzne reprezentácie funkcie (graf, tabuľku, analytický predpis a slovný opis), prechádzať medzi nimi podľa kontextu, a voliť reprezentácie vhodné pre daný problém,
- vnímať funkčné závislosti a modelovať realistické situácie pomocou funkcií, **interpretovať parametre modelu a posudzovať jeho vhodnosť a limity.**

Cieľ F.2: Organizovať a analyzovať dáta, odhaľovať pravidelnosti v neusporiadaných situáciách a využívať štatistické metódy na ich spracovanie, interpretáciu a adekvátnu vizualizáciu.

Žiak vie/dokáže:

- rozpoznávať pravidelnosti v neusporiadaných situáciách, organizovať a systematicky prehľadávať dáta,
- formulovať výskumné otázky, navrhovať adekvátne metódy zberu dát a identifikovať extrémny či anomálie,
- klasifikovať štatistické znaky na kvantitatívne (diskrétny a spojitý) a kvalitatívne (nominálne a ordinálne) a podľa ich povahy voliť vhodné charakteristiky (priemer, medián, **kvartily, variabilita**) a vizualizácie (histogram, boxplot, stĺpcový graf, bodový graf) aj s využitím digitálnych technológií,
- kriticky posudzovať štatistické dáta, vizualizácie a závery a identifikovať metodologické chyby, neadekvátne zobrazenia a dezinterpretácie informácií.

Cieľ F.3: Rozumieť pravdepodobnostným modelom, pracovať s neistotou a prijímať informované rozhodnutia na základe pravdepodobnostných modelov a štatistických odhadov.

Žiak vie/dokáže:

- modelovať situácie pomocou vhodného prístupu k pravdepodobnosti (klasický, geometrický, frekvenčný – založený na dátach, subjektívny – založený na informáciách, skúsenosti, úsudku **a podmienenej pravdepodobnosti**) a posúdiť limity zvoleného modelu,
- posúdiť reprezentatívnosť výberového súboru a vyvodíť štatistické závery o celku so zohľadnením miery neistoty a možného skreslenia dát,
- **používať očakávanú hodnotu pri racionálnom rozhodovaní v situáciách neistoty,**
- **vysvetliť vzťah medzi teoretickou pravdepodobnosťou a experimentálnymi výsledkami na princípe zákona veľkých čísel a využívať digitálne simulácie na overovanie stability relatívnych početností náhodných javov,**
- **interpretovať štatistické dáta využitím vlastností teoretických rozdelení dát a vyhodnocovať pravdepodobnosť výskytu v kontexte realistickej situácie.**

Geometria a meranie

Cieľ G.1: Pracovať s rôznymi reprezentáciami geometrických útvarov, interpretovať ich význam a prepájať ich pri riešení problémov.

Žiak vie/dokáže:

- definovať geometrické útvary rôznymi spôsobmi (synteticky a analyticky) a posúdiť vhodnosť zvolenej definície podľa kontextu úlohy,
- prechádzať medzi náčrtom, konštrukciou, rovnicou a zobrazením v súradnicovej sústave rovinných útvarov,
- vizualizovať a modelovať geometrické objekty aj s využitím digitálnych nástrojov,
- využívať množiny bodov danej vlastnosti pri skúmaní útvarov a riešení konštrukčných úloh,
- využívať geometrické transformácie (symetria, posunutie, **otočenie, rovnolehlosť**) pri skúmaní útvarov a riešení konštrukčných úloh,
- identifikovať invariantné vlastnosti geometrických útvarov pri ich transformáciách a manipuláciách,
- navrhnúť, zapísať a zdôvodniť postup riešenia konštrukčnej úlohy.

Cieľ G.2: Analyzovať priestorové situácie a vzťahy medzi geometrickými objektmi a vyjadrovať ich rôznymi spôsobmi.

Žiak vie/dokáže:

- využiť zobrazenie telesa vo voľnom rovnobežnom premietaní pri riešení úloh,
- modelovať realisticke situácie synteticky (pomocou geometrických objektov) **a analyticky (pomocou súradnicových alebo vektorových metód),**
- určovať vzájomné polohy bodov, priamok a rovín synteticky (náčrt, rez) **a analyticky.**

Cieľ G.3: Určovať a interpretovať metrické vlastnosti geometrických objektov s využitím vhodných matematických nástrojov.

Žiak vie/dokáže:

- určovať vzdialenosti a odchýlky (veľkosti uhlov) v rôznych geometrických situáciách,
- riešiť metrické úlohy v rovine **a priestore** trigonometrickými vzťahmi **a analytickými postupmi**,
- využívať metrické vzťahy pri realistických úloh.

Cieľ G.4: Zdôvodňovať geometrické tvrdenia a vytvárať matematické argumenty s využitím rôznych prístupov.

Žiak vie/dokáže:

- formulovať postup riešenia a logicky zdôvodniť jednotlivé kroky,
- rozlíšiť medzi empirickým overením (obrázkom, meraním) a dôkazom,
- **analyzovať správnosť geometrických tvrdení a identifikovať chyby v argumentácii**,
- **dokazovať geometrické tvrdenia strategickým výberom syntetického alebo analytického postupu.**

Základy formálnej matematiky

Cieľ Z.1: Využívať výroky, zaužívané matematické konvencie a presnú terminológiu ako univerzálny jazyk na opis situácií a pravidiel, porozumieť množinovému jazyku **a budovaniu formálnej modernej matematiky**.

Žiak vie/dokáže:

- rozlíšiť v matematickom texte medzi zavedením pojmu (definíciou), tvrdením, ktoré treba dokázať (vetou) a konkrétnym príkladom,
- používať množinovú symboliku a logické spojky na jednoznačný zápis podmienok a prechádzať medzi slovným zadáním a formálnym matematickým zápisom.

Cieľ Z.2: Posudzovať platnosť tvrdení, úsudkov a využívať logiku pri tvorbe záverov.

Žiak vie/dokáže:

- rozpoznať chyby v matematickej argumentácii, vysvetliť, v čom spočíva ich nesprávnosť a navrhnúť korektný spôsob ich zdôvodnenia,
- určiť pravdivosť (pravdivostnú hodnotu) zložených výrokov a tvrdení s kvantifikátormi (existenčnými a všeobecnými) v rôznych prirodzených **a formalizovaných matematických** kontextoch,
- formulovať negácie tvrdení,
- vyvrátiť nepravdivé všeobecné tvrdenie cieľným nájdením (alebo konštrukciou) jedného korektného protipríkladu.

Cieľ Z.3: Analyzovať štruktúru formálnych dôkazov a konštruovať deduktívne argumenty.

Žiak vie/dokáže:

- rozlíšiť medzi empirickým overením hypotézy na konečnom počte príkladov a **exaktným matematickým dôkazom**,
- **identifikovať logickú štruktúru dôkazu (predpoklady, postupnosť deduktívnych krokov, záver) a odhaliť v nej prípadné logické chyby alebo kruhovú argumentáciu,**
- **zvoliť a aplikovať vhodnú stratégiu dokazovania (priamy dôkaz, nepriamy dôkaz, dôkaz sporom) pri overovaní matematických vzťahov a tvrdení.**

Obsahový štandard

Vzdelávací štandard predmetu matematika je rozdelený na štyri obsahové komponenty, každý komponent je rozpracovaný pre pojmy-vzťahy-postupy a matematické praktiky, ktoré určujú ako mieru abstrakcie a množstvo zručností (odlíšenie základnej a rozšírenej úrovne), tak aj prepojenie naučených pojmov, vzťahov a postupov pri riešení realistických situácií, reprezentovaní a argumentovaní. Pre lepšiu čitateľnosť opätovne pripomíname význam jednotlivých položiek v každom zo subkomponentov:

Vysvetlenie štruktúry subkomponentu	Pojmy Pomenovanie nových, doteraz aktívne neosvojených, či doteraz nepomenovaných matematických objektov, ktorých hĺbka a spôsob znalosti je špecifikovaný v matematických praktikách. Pre zjednodušenie čitateľnosti uvádzame <u>pojmy osvojené na ZŠ podfarbené sivou</u> . Ovládanie pojmov znamená: - žiak má vybudovanú korektnú predstavu o danom pojme, - rozumie zadaniam úloh, v ktorých sa tieto pojmy vyskytujú, - vie pojmy správne použiť pri formuláciách svojich odpovedí, - len ak to praktika vyžaduje, vie pojmy vysvetliť alebo definovať – čomu vždy musí predchádzať porozumenie. Skutočnosť, že sa od žiakov nevyžaduje aktívna znalosť definície, neznamená, že ju učiteľ nemá vo vyučovaní využívať.		Vzťahy Matematické súvislosti, vzorce a tvrdenia, ktoré sa v kurikule využívajú a ktorých spôsob používania a porozumenia je špecifikovaný v matematických praktikách. Ovládanie vzťahov znamená: - žiak ich vie správne a zmysluplne aplikovať pri riešení úloh, modelovaní a argumentácii, - len ak to praktika vyžaduje, tak vyslovenie, odvodenie či dokázanie tvrdenia.
	Matematické reprezentácie Rôzne formy zobrazovania (vizualizácie) pojmov a vzťahov. Táto matematická praktika zahŕňa: - poznať uvedené reprezentácie a rozumieť významu ich použitia, - vedieť v nich čítať – rozumieť im, - vedieť ich zostaviť (niekedy aj/len s využitím digitálnych nástrojov), - prechádzať medzi rôznymi reprezentáciami, - vybrať vhodnú reprezentáciu v konkrétnom kontexte.	Matematické modelovanie Matematizácia realistických problémov. Táto matematická praktika zahŕňa: - identifikáciu situácií, v ktorých je užitočný konkrétny matematický aparát, - výber alebo zostavenie správneho modelu s ohľadom na realistický kontext, - využitie digitálnych nástrojov.	Matematická komunikácia a argumentácia Používanie matematického jazyka, terminológie a symboliky na presné vyjadrovanie myšlienok, zdôvodňovanie postupov a posudzovanie tvrdení. Táto matematická praktika zahŕňa: - používanie matematickej terminológie a symboliky, - formulovanie myšlienok, postupov a záverov, - zdôvodňovanie a obhajobu tvrdení, - kritické posudzovanie tvrdení a identifikáciu chýb, - v niektorých kontextoch aj definovanie pojmov, odvodenie alebo dôkaz tvrdení, - argumentáciu a dôkazy.

Postupy

Zoznam tých osvojených a automatizovaných postupov, algoritmov a metód riešenia úloh, ktorých neplynulé používanie by predstavovalo prekážku pri porozumení a riešení zložitejších matematických problémov. Osvojeniu a automatizácii postupov má predchádzať ich porozumenie.

Ovládanie postupov znamená:

- bezchybné vykonávanie základných matematických algoritmov, výpočtov a štandardných postupov,
- zvládnutie rutinných úloh do takej miery, aby ich žiak vykonával plynule, efektívne a bez zbytočného kognitívneho preťaženia,
- schopnosť nielen mechanicky počítať, ale aj strategicky si zvoliť najvhodnejší a najjednoduchší postup pre konkrétny typ problému.

1. Čísla, výrazy a operácie s nimi

1. 1 Množstvá, čísla a ich vlastnosti	Pojmy (úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)		Vzťahy (úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)	
	- deliteľnosť, zvyšok po delení, prvočíslo, zložené číslo, násobok, deliteľ, najmenší spoločný násobok, najväčší spoločný deliteľ - n-ciferné číslo, ciferný súčet - pozičná číselná sústava - súdeliteľné, nesúdeliteľné čísla, prvočíselný rozklad - kladné a záporné celé číslo; opačné čísla, absolútna hodnota. - desatinné číslo, desatinná čiarka, celá a desatinná časť desatinného čísla, zlomok, čitateľ, menovateľ, zlomková čiara, spoločný menovateľ, základný tvar zlomku, desatinný zlomok, zložený zlomok, percento (%), základ, počet percent, hodnota prislúchajúca počtu percent - desatinný rozvoj (konečný, nekonečný a periodický), perióda, periodické čísla - racionálne číslo, iracionálne číslo, reálne číslo - druhá a tretia mocnina a odmocnina, číslo π (pí) - základ mocniny, exponent, mocnina (s prirodzeným, celočíselným a racionálnym exponentom), n-tá odmocnina - zaokrúhľovanie, zaokrúhľovanie nahor a nadol, približne, presne - zaokrúhlená hodnota, približná hodnota, platná číslica (v zápise približného čísla), (absolútna) chyba približného čísla - rozšírený tvar zlomku, prevrátený zlomok, zložený zlomok, promile - úrok, (ročná) úroková miera, jednoduché a zložené úrokovanie, súčasná a budúca hodnota peňazí, DPH, úver, anuitná splátka, lízing, RPMN		- pravidlá pre počítanie s mocninami a odmocninami: - o pre $a, b > 0, x, y \in \mathbb{Q}$ platí:$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$(a^x)^y = a^{xy}$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$(ab)^x = a^x b^x$$a^0 = 1$ - o pre $x, y \geq 0, m, n \in \mathbb{N}$ platí:$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt{mn}x$$(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$ - o pre $x \in \mathbb{R}$ platí: $\sqrt{x^2} = x$ - vzťahy medzi číselnými množinami: - o $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ - o $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ - o $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$ - každé zložené číslo n je deliteľné aspoň jedným prvočísлом p, pričom $p \leq \sqrt{n}$ - kritériá deliteľnosti číslami 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 - ak p je prvočíslo, tak $\sqrt{p}$ je iracionálne číslo	
	Matematické reprezentácie - číslcový a rozvinutý zápis čísla v pozičnej desiatkovej a v pozičných sústavách s iným základom - reprezentácia čísla transparentná pre deliteľnosť prirodzeným číslom v tvare $kq + r, 0 \leq r < q$ - desatinné číslo a zlomok ako reprezentácie racionálneho čísla a vzťahy medzi nimi - desatinné číslo s nekonečnými desatinným rozvojom bez periódy ako reprezentácia iracionálneho čísla - rôzne ekvivalentné vyjadrenia daného čísla	Matematické modelovanie - nájdenie optimálneho riešenia úlohy s realistickým kontextom identifikovaním najmenšieho spoločného násobku, resp. najväčšieho spoločného deliteľa - riešenie problémov využitím deliteľnosti vhodným prirodzeným číslom - využitie vedeckého zápisu čísel na odhad výsledku aritmetických operácií s veľmi veľkými, resp. veľmi malými hodnotami v kontexte reálnej situácie	Matematická komunikácia a argumentácia - argumentovanie výberu spôsobu financovania - vysvetlenie dôkazov tvrdení typu súčet dvoch párných, resp. nepárnych čísel je párne číslo - formulácia a argumentovanie platnosti kritéria deliteľnosti zloženým číslom (ak toto zložené číslo je súčinom súdeliteľných/nesúdeliteľných čísel, tak kritérium deliteľnosti týmto číslom neplatí/platí) - vysvetlenie: každé prirodzené číslo väčšie ako 1 má jednoznačný prvočíselný rozklad	

- priamka ako geometrický model množiny reálnych čísel - vizualizácia vzájomného vzťahu číselných množín ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) pomocou Vennových diagramov	- jednoduché a zložené úrokovanie v rôznych časových úsekoch v úlohách s realistickým kontextom – transakcie, vklady, istina, DPH - voľba logicky správnej číselnej množiny ako definičného oboru pre premenné v modeli reálnej situácie - modelovanie jednoduchého a zloženého úrokovania, zmeny hodnoty v čase a vplyvu zaokrúhľovania na výsledok pomocou tabuľkového kalkulátora - modelovanie splácania úveru a lízingu využitím funkcií tabuľkového kalkulátora	- rozhodnutie, či je dané číslo racionálne, alebo iracionálne, na základe jeho desatinného rozvoja, vrátane uvedenia si obmedzení pri veľmi dlhých periódach - nájdenie kontrapríkladu pre vyvrátenie platnosti tvrdenia: $\forall a, b \geq 0, a \geq b: \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ - posúdenie dopadu chyby aritmetických operácií s nepresnými číslami v kontexte reálnej situácie - formulovanie tvrdenia o deliteľnosti v tvare implikácie, alebo ekvivalencie a identifikácia nutnej a postačujúcej podmienky pre danú vlastnosť - dôkaz kritériá deliteľnosti - dôkaz iracionality odmocniny z prvočísla - vysvetlenie princípu sčítania v pozičnej sústave so základom iným ako 10
Postupy - určenie najväčšieho spoločného deliteľa a najmenšieho spoločného násobku podľa definície a s využitím prvočíselného rozkladu - operácie s číslami zapísanými vedeckým spôsobom - porovnávanie reálnych čísel a ich približných hodnôt - operácie s mocninami a odmocninami, odstránenie odmocniny z menovateľa v náročnosti nevyhnutnej pre zvládnutie ďalších celkov - výpočet cien s DPH a bez DPH - výpočet ceny pred zľavou a po zľave - prevody medzi číselnými sústavami - sčítanie v dvojkovej číselnej sústave		

1.2 Určovanie počtu prvkov konečných množín (Kombinatorika)	Pojmy (úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)		Vzťahy (úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)	
	- usporiadanie prvkov s opakovaním a bez opakovania - faktoriál, kombinačné číslo - kombinácie, kombinácie s opakovaním, variácie, variácie s opakovaním, permutácie, permutácie s opakovaním - Pascalov trojuholník		- kombinatorické pravidlá súčtu a súčinu - vzťah medzi počtom usporiadaných a neusporiadaných n-tíc - $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n, n \in \mathbb{N}; 0! = 1$ (definitoricky) - $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ pre $n, k \in \mathbb{N}_0; 0 \leq k \leq n$ - vlastnosti kombinačných čísel: symetria a Pascalovo pravidlo - binomická veta	
	Matematické reprezentácie - stromový diagram - karteziánsky graf - lexikografické usporiadanie množiny výstupov – systematické vypisovanie všetkých možností podľa poradia - grafická reprezentácia pomocou úplného grafu pre úlohy vedúce k výpočtu typu počet spojení medzi dvojicami prvkov - numerická reprezentácia (kombinačné číslo) a grafická reprezentácia (cesty po mriežke) – vizuálne znázornenie úloh na počet kombinácií bez opakovania - grafická reprezentácia pomocou bipartitného grafu – pre úlohy založené na pravidle súčtu a párovaní prvkov z dvoch množín - priehradkový systém ako reprezentácia úloh na kombinácie s opakovaním - binárne kódovanie – reprezentácia systému podmnožín pomocou postupností 0 a 1	Matematické modelovanie - analýza situácie a tvorba modelu (s ohľadom na poradie, opakovanie, rozlíšiteľnosť) bez použitia pojmov kombinácie, variácie a permutácie a interpretácia výsledkov v kontexte úlohy - určenie počtu možností rozdelením problému na časti a použitím pravidla súčtu a súčinu s vhodným znázornením (so zohľadnením poradia a opakovania) - aplikácia kombinatorických postupov pri riešení úloh z reálneho prostredia (typu výber tímu, tvorba kódov, usporiadanie objektov) a ich zovšeobecnenie - rozlíšenie, či v konkrétnej úlohe ide o variácie, kombinácie alebo permutácie	Matematická komunikácia a argumentácia - zdôvodnenie postupu výpočtu podľa podmienok výberu a usporiadania - porovnanie a obhajoba rôznych riešení a reprezentácií - overenie úplnosti výpisov (aj neúplných), odhalenie systému a chýb v postupoch - definovanie faktoriálu ako počtu všetkých usporiadaní n rozlíšiteľných prvkov - vysvetlenie významu kombinačného čísla ako počtu výberov k prvkov z n bez ohľadu na poradie - zdôvodnenie vlastností kombinačných čísel (symetria, Pascalovo pravidlo) pomocou kombinatorických úvah - vysvetlenie vzťahov pre počet kombinácií, variácií a permutácií aj s opakovaním pomocou kombinatorických pravidiel súčtu a súčinu - uviedenie príkladu, že rôzne úlohy môžu mať rovnaký kombinatorický model, a že rovnaký model môže mať rôzne kontextové interpretácie - vysvetlenie prepojenia Pascalovho trojuholníka, kombinačných čísel a binomickej vety - argumentovať rovnosť súčtu kombinačných čísel v riadku Pascalovho trojuholníku a počtu zodpovedajúcich podmnožín	
	Postupy			

- tvorba systematického výpisu možností pre primerane veľké množiny prvkov, ktoré sú riešeniami kombinatorických problémov charakterizovaných v časti *Pojmy*
- konštrukcia stromového diagramu a iných vizuálnych reprezentácií
- výpočet, úprava a zjednodušovanie číselných a algebraických výrazov obsahujúcich faktoriály a kombinačné čísla v náročnosti, ktorá nepresahuje aparát potrebný na určenie počtu prvkov v modelovaných situáciách
- určovanie hodnôt kombinačných čísel priamym výpočtom **aj s využitím Pascalovho trojuholníka**
- **algebraický rozvoj dvojčlena umocneného na prirodzený exponent s využitím binomickej vety**

1.3 Výrazy a ich ekvivalencia	Pojmy (úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách) - výraz, hodnota číselného výrazu, koeficient, premenná, člen s premennou - číselný výraz, algebraický výraz, výraz s jednou a viacerými premennými - mnohočlen, kvadratický výraz, lomený racionálny výraz, odmocninový (iracionálny) výraz, exponenciálny výraz, logaritmický výraz, goniometrický výraz - výraz s absolútnou hodnotou, nulový bod - definičný obor výrazu - výraz s premennou v menovateli	Vzťahy (úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách) - algebraické identity: ○ $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ ○ $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$ ○ $(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$ ○ $(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \dots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$, $x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$ - logaritmické identity: ○ $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x, a > 0, a \neq 1$ ○ Pre kladné čísla a, b a základ $z \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ platí: $\log_z(a \cdot b) = \log_z a + \log_z b$ $\log_z \frac{a}{b} = \log_z a - \log_z b$ ○ Pre $a > 0, s \in \mathbb{R}, z \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ platí: $\log_z a^s = s \cdot \log_z a$ ○ Pre $b > 0, a, c \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ platí: $\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$, špeciálne pre $b, c \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ platí: $\log_c b = \frac{1}{\log_b c}$ - goniometrické identity: ○ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ○ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ ○ $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha$ ○ $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ ○ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ špeciálne $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \beta, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
-------------------------------	---	--

			○ $\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$, $\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ špeciálne pre $\alpha = \frac{x}{2}$: $\left \cos \frac{x}{2} \right = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$, $\left \sin \frac{x}{2} \right = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$
Matematické reprezentácie - algebraická a geometrická reprezentácia výrazov (s možnosťou využitia digitálnych nástrojov) - $x - a$ ako vzdialenosť obrazov čísel x a a na číselnej osi	Matematické modelovanie - zápis slovného opisu pomocou výrazov - interpretácia výrazov v kontexte reality - opis a kvantifikácia rôznych, vrátane realistických, situácií pomocou vzťahov medzi veličinami	Matematická komunikácia a argumentácia - zdôvodnenie ekvivalencie výrazov - odôvodnenie platnosti vzťahov pre umocnenie dvojčlena na druhú - interpretácia významu jednotlivých členov alebo premenných v kontexte popisovanej reálnej situácie - identifikácia a oprava logickej alebo algebraickej chyby v predložennom postupe úpravy výrazu - odôvodnenie platnosti exponenciálnych a logaritmických identít	
Postupy - úprava výrazov (zjednodušovanie, rozširovanie, vrátane použitia neutrálneho prvku vzhľadom na násobenie/sčítanie) s použitím vlastností (komutatívnosť, asociatívnosť, distributívnosť) - určenie hodnoty výrazu (presne alebo odhadom) - určenie definičného oboru výrazu - odstránenie absolútnej hodnoty výrazu (rozkladom na prípady pomocou nulových bodov) - úprava kvadratického výrazu na štvorec - úprava mnohočlena na súčin (vynímaním spoločného činiteľa pred zátvorku, rozkladom použitím vzorcov vo <i>Vzťahoch</i> tejto tabuľky, časť <i>Algebraické identity</i>) - použitie pravidiel pre počítanie s mocninami a odmocninami			

1.4 Rovnice a nerovnice	Pojmy (úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)	Vzťahy (úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)	
	- neznáma, lineárna rovnica/nerovnica s jednou neznámou, pravá a ľavá strana rovnice/nerovnice, riešenie (koreň) rovnice/nerovnice. - rovnica, nerovnica, sústava rovníc a nerovníc - lineárny/kvadratický člen, koeficient pri lineárnom/kvadratickom člene - diskriminant kvadratickej rovnice - rovnica a nerovnica s absolútnou hodnotou, rovnica a nerovnica s neznámou v menovateli - kvadratická, iracionálna, exponenciálna, logaritmická a goniometrická rovnica a nerovnica - ekvivalentné a dôsledkové úpravy rovnice a nerovnice, množina koreňov rovnice a nerovnice - parameter, lineárna a kvadratická rovnica s parametrom	- vzťah medzi znamienkami súčinu/podielu dvoch výrazov a znamienkami jednotlivých činiteľov/delenc a deliteľa - vzťah medzi počtom riešení rovnice $f(x) = 0$ v $\mathbb{R}$ a vlastnosťami funkcie f (t. j. zohľadnenie periódy pri goniometrických funkciách, prostosť exponenciálnych a logaritmických funkcií, vplyv absolútnej hodnoty na počet koreňov) - viď komponent <i>Závislosti, funkcie a práca s údajmi</i> - vzťah medzi diskriminantom a počtom koreňov kvadratickej rovnice - $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, kde x_1, x_2 sú korene rovnice $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ - Viëtove vzťahy (pre kvadratickú rovnicu): $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}$, kde x_1, x_2 sú korene rovnice $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$	
	Matematické reprezentácie - reprezentácia množiny riešení rovnice/nerovnice slovným opisom, symbolickým zápisom, priesečníkom grafu funkcie s niektorou zo súradnicových osí, priesečníkom grafov dvoch funkcií (aj s využitím vhodných digitálnych nástrojov) - zápis množiny koreňov pomocou intervalov, vymenovaním prvkov alebo charakteristickou vlastnosťou - reprezentácia riešenia sústavy ako prieniku a/alebo zjednotenia množín riešení jednotlivých rovníc/nerovníc tvoriacich sústavu aj s využitím digitálnych nástrojov	Matematické modelovanie - modelovanie realistických situácií pomocou rovníc a nerovníc s využitím algebraického zápisu, tabuľky a grafu s možnosťou využitia vhodného digitálneho nástroja - riešenie kontextových úloh vedúcich k rovniciam a nerovniciam a interpretácia získaných riešení v jazyku pôvodného zadania, vrátane jednoduchých finančných rozhodnutí pri porovnaní ponúk, výpočte cieľovej sumy, rozpočtovom obmedzení alebo maximálnej splátke	Matematická komunikácia a argumentácia - overenie prípustnosti riešení vzhľadom na definičný obor a podmienky vyplývajúce z kontextu riešeného problému - interpretácia významu symbolu v danom kontexte (premenná, neznáma, koeficient, parameter) - argumentovanie rozdielu medzi identitou (rovnosť, ktorá platí pre každú prípustnú hodnotu) a rovnicou (hľadanie hodnôt, pre ktoré rovnosť platí) - diskutovanie a argumentovanie, ktoré z koreňov rovnice, ktorá vznikla použitými úpravami, sú aj koreňmi pôvodnej rovnice - diskusia vplyvu zmeny parametrov alebo koeficientov na hodnotu a počet koreňov (vhodnou vizualizáciou možnosťou využitia digitálnych nástrojov) - vysvetlenie zmeny znaku nerovnosti pri riešení nerovníc využitím vlastností prislúchajúcich funkcií (rast, klesanie) - argumentovanie, či použitá úprava zachová alebo či môže zmeniť množinu riešení danej rovnice, alebo nerovnice

		- argumentácia o počte možných koreňov pre jednotlivé typy rovníc s využitím vlastností funkcií a ich grafickej reprezentácie - odvodenie vzťahu pre výpočet koreňov kvadratickej rovnice - zdôvodnenie Viéťových vzťahov pre kvadratickú rovnicu
	Postupy: - vyjadrenie neznámej zo vzorca v náročnosti nevyhnutnej pre zvládnutie iných tematických celkov - riešenie lineárnych rovníc, nerovníc - riešenie kvadratických rovníc a nerovníc - riešenie lineárnych a kvadratických rovníc s parametrom - riešenie sústav dvoch a troch lineárnych rovníc a sústav lineárnej a kvadratickej rovnice - riešenie základných iracionálnych (po úprave lineárna rovnica), goniometrických, exponenciálnych, logaritmických rovníc a nerovníc typu $af(x) * k$; $a, k \in \mathbb{R}$, kde * označuje niektorý zo znakov $=, \geq, \leq, >, <$ čítaním z grafu - riešenie rovníc a nerovníc s premennou v menovateli (vedúce k lineárnej alebo kvadratickej rovnici/nerovnici) - riešenie lineárnej a kvadratickej rovnice a nerovnice s jednou absolútnou hodnotou, a viacerými absolútnymi hodnotami - riešenie náročnejších (vedúcich k substitúcii alebo využitiu definícií a vlastností prislúchajúcich funkcií) iracionálnych, goniometrických, exponenciálnych a logaritmických rovníc a nerovníc - riešenie rovníc a nerovníc s premennou v menovateli, rovníc a nerovníc s absolútnou hodnotou $f(x) * k, f(x) * k$; $k \in \mathbb{R}$, kde * označuje niektorý zo znakov $=, \geq, \leq, >, <$ - nájsť všetky riešenia rovníc a nerovníc zapísaných v tvare $f(x)g(x) * 0$, kde * označuje niektorý zo znakov $=, \geq, \leq, >, <$, ak vie riešiť $f(x) * 0, g(x) * 0$ - nájsť všetky riešenia nerovníc zapísaných v tvare $\frac{f(x)}{g(x)} * 0$, kde * označuje niektorý zo znakov $\geq, \leq, >, <$, ak vie riešiť $f(x) * 0, g(x) * 0$	

2. Závislosti, funkcie a práca s údajmi

2.1 Funkcia ako matematický objekt, jej vlastnosti a transformácie	Pojmy (úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách) - súradnicové osi, súradnice bodu, graf - funkcia, argument, funkčná hodnota, definičný obor, obor hodnôt - postupnosť, člen postupnosti - postupnosť ako špeciálny prípad funkcie - vlastnosti funkcií: - o monotónnosť (rastúca, klesajúca, neklesajúca, nerastúca) - o ohraničenosť, maximum a minimum (globálne, lokálne) - o párna, nepárna funkcia - o prostá funkcia - inverzná funkcia - zložená funkcia	Vzťahy (úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách) - rastúca/klesajúca funkcia je prostá - graf inverznej funkcie je osovo súmerný s grafom pôvodnej funkcie podľa priamky $y = x$ - k prostej funkcii existuje inverzná funkcia
	Matematické reprezentácie - funkčná závislosť: slovný opis, tabuľka, predpis, graf - inverzná funkcia: slovný opis, tabuľka, graf, predpis - tabuľková a grafická reprezentácia funkcií v tvare: $f(x) + c, f(x - c), c \cdot f(x), f(c \cdot x), -f(x), f(x)$, kde graf funkcie $f(x)$ je známy - ekvivalentné tvary explicitného predpisu (viď <i>Výrazy a ich ekvivalencia</i>) - zložená funkcia: tabuľka, predpis	Matematické modelovanie - výber modelu podľa charakteru diskkrétnej/spojitej zmeny a určenie definičného oboru funkcie vzhľadom na limity daného kontextu - prepojenie vlastností funkcie s priebehom reálneho deja - interpretácia závislej a nezávislej premennej aj v kontexte realistickej situácie - využitie inverznej funkcie aj v kontexte realistickej situácie na zistenie pôvodného stavu (vstupu) - určovanie hodnoty zloženej funkcie a interpretácia zloženej funkcie ako modelu skladania nadväzujúcich závislostí (typu teplota závislá od výšky závislej od času)

	Postupy - náčrt grafu základných elementárnych funkcií (lineárna, kvadratická, mocninová, exponenciálna, logaritmická, nepriama úmernosť, lineárne lomená funkcia, goniometrické funkcie) - načrtnutie grafu, resp. zostavenie predpisu funkcie, ktorá má dané vlastnosti - náčrt zmien grafu funkcie $f(x)$: $f(x) + c$, $f(x - c)$, $c \cdot f(x)$, $f(c \cdot x)$, $-f(x)$, $f(x)$, kde graf funkcie $f(x)$ je známy, alebo kombinácie týchto zmien - zostrojenie grafu inverznej funkcie k danej funkcii s využitím osovej súmernosti - tvorba grafu funkcie s využitím digitálnych nástrojov - určenie vlastností funkcie z jej predpisu (definičný obor – pričom riešená rovnica alebo nerovnica nepresahuje štandard určený v subkomponente 1.4, prostá funkcia, monotónnosť, párnosť, nepárnosť) - určenie hodnôt zloženej funkcie vzniknutej skladaním dvoch na seba nadväzujúcich závislostí		
2.2 Modely zmien a rastu	Pojmy (úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách) - lineárna funkcia - kvadratická funkcia, nepriama úmernosť, mocninová funkcia s celočíselným exponentom, lineárna lomená funkcia - exponenciálna a logaritmická funkcia - smernica priamky - asymptota - vrchol paraboly (parabola ako graf kvadratickej funkcie) - aritmetická a geometrická postupnosť, diferenciacia, kvocient	Vzťahy (úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách) - vzťah medzi koeficientmi kvadratickej funkcie a vrcholom paraboly - $y = \log x \Leftrightarrow a^y = x$, $a \in (0,1) \cup (1, \infty)$ - n-tý člen aritmetickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s diferenciou d: $a_n = a_s + (n - s)d$, $n, s \in \mathbb{N}$, špeciálne $a_n = a_1 + (n - 1)d$, $n \in \mathbb{N}$ - pre súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s diferenciou d platí: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ - n-tý člen geometrickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s kvocientom q ($q \neq 0$): $a_n = a_s q^{n-s}$, $n, s \in \mathbb{N}$, špeciálne $a_n = a_1 q^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ - pre súčet prvých n členov geometrickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s kvocientom $q \neq 1$ platí: $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$	
	Matematické reprezentácie - priamka, parabola, hyperbola (ako graf nepriamej úmernosti a ako graf lineárne lomenej funkcie) - exponenciálna a logaritmická krivka ako grafy funkcií - rôzne tvary predpisu kvadratickej funkcie (všeobecný, vrcholový, súčinný tvar)	Matematické modelovanie - sledovanie a porovnávanie rôznej rýchlosti zmien pri jednotlivých typoch rastu a poklesu (lineárnom, kvadratickom, exponenciálnom a logaritmickom) pomocou grafu a tabuľky aj s využitím digitálnych technológií - aplikácia aritmetickej a geometrickej postupnosti pri modelovaní zmien, ktoré neprebiehajú spojito, ale v	Matematická komunikácia a argumentácia - interpretácia koeficientov v predpise funkcií v kontexte ich monotónnosti, rýchlosti zmeny a tvaru grafu - zdôvodnenie vplyvu koeficientu pred kvadratickým členom na orientáciu paraboly a existencia minima/maxima

		diskrétnych krokoch aj vo finančnom kontexte (sporenie, úročenie, inflácia, splácanie) - využitie aritmetickej postupnosti na predikciu stavu v danom kroku (n-tý člen) a výpočet celkovej nakumulovanej hodnoty (súčet) v kontexte realistickej situácie - využitie geometrickej postupnosti na predikciu stavu v danom kroku (n-tý člen) a výpočet celkovej nakumulovanej hodnoty (súčet) v kontexte realistickej situácie - využitie kvadratickej funkcie na riešenie optimalizačných úloh spojených s hľadaním maxima alebo minima	- odvodenie súradníc vrcholu paraboly z predpisu kvadratickej funkcie - opísanie správania lineárnej lomenej funkcie v okolí asymptôt - interpretácia smernice lineárnej funkcie ako pomeru zmeny funkčnej hodnoty k zmene argumentu - interpretácia tangensu smerového uhla priamky v karteziánskej súradnicovej sústave ako jej smernice - určenie a interpretácia priemernej zmeny funkčnej hodnoty na danom intervale pomocou smernice sečnice grafu funkcie - súvis aritmetickej postupnosti a lineárneho rastu (poklesu) - súvis geometrickej postupnosti s kladným kvocientom a exponenciálneho rastu (poklesu) - odvodenie vzťahov pre n-tý člen a pre súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti - odvodenie vzťahov pre n-tý člen a pre súčet prvých n členov geometrickej postupnosti
	Postupy - zostavenie predpisu lineárnej a kvadratickej funkcie z dvoch/troch bodov (s dôrazom na kontextové úlohy) - určenie súradníc vrcholu kvadratickej funkcie $f(x) = ax^2 + bx + c$, kde $a = 1$ a $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ - výpočet smernice sečnice grafu funkcie určenej dvoma hodnotami z tabuľky alebo bodmi grafu		

2.3 Periodické deje a cyklickosť	Pojmy (úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách) - periodická funkcia, perióda, amplitúda - goniometrické funkcie (sínus, kosínus, tangens) - orientovaný uhol, jednotková kružnica, oblúčková miera, radián		Vzťahy (úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách) - $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ - $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ - $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ - $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ - $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	
	Matematické reprezentácie - veľkosť uhla v stupňovej a oblúčovej miere - jednotková kružnica - sínusoida, kosínusoida, tangentoida ako grafy goniometrických funkcií	Matematické modelovanie - rozpoznávanie periodicity v realistických situáciách a jej modelovanie pomocou grafu a tabuľky aj s využitím digitálnych technológií - modelovanie dejov/situácií funkciou s predpisom v tvare $y = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$, $y = a \cdot \cos(b(x - c)) + d$, alebo $y = a \cdot \tan(b(x - c)) + d$		Matematická komunikácia a argumentácia - vysvetlenie prepojenia medzi pomermi strán pravouhlého trojuholníka a goniometrickými funkciami zavedenými pomocou jednotkovej kružnice - zdôvodnenie periodicity a symetrie goniometrických funkcií na základe pohybu bodu po jednotkovej kružnici - vysvetlenie rozdielov medzi periodickými a neperiodickými modelmi - interpretácia významu koeficientov v predpise funkcie $y = a \cdot f(b(x - c)) + d$, kde f je sínus, kosínus, tangens, v kontexte periodických dejov
	Postupy - určenie vlastností funkcie z grafu (definičný obor, obor hodnôt, priesečníky, monotónnosť, periodicita) - prevod veľkosti uhla medzi stupňovou a oblúčovou mierou - vyjadriť na základe jednotkovej kružnice $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ pre $\alpha \in \mathbb{R}$ pomocou sínusu, kosínusu alebo tangensu vhodného ostrého uhla			

2.4 Pravdepodobnosť	Pojmy (úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách) - udalosť, istá, možná, nemožná udalosť - pravdepodobnosť - náhodný pokus, náhodný jav, výsledok náhodného pokusu, relatívna početnosť javu - istý jav, nemožný jav, doplnkový jav, navzájom sa vylučujúce javy, nezávislé javy - experimentálna pravdepodobnosť, teoretická pravdepodobnosť, Laplaceova (klasická) definícia pravdepodobnosti - geometrická pravdepodobnosť, podmienená pravdepodobnosť, očakávaná hodnota		Vzťahy (úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách) - vlastnosti pravdepodobnosti: • pre pravdepodobnosť P udalosti A platí $0 \leq P(A) \leq 1$ • $P(A) + P(A') = 1$, kde A' je doplnkový jav k javu A • pravdepodobnosť istého javu je 1 • pravdepodobnosť nemožného javu je 0 • nech $A \subseteq B$, potom $P(A) \leq P(B)$ - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, kde A, B sú nezlučiteľné náhodné javy - $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, ak A, B sú nezávislé javy - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ - pri väčšom počte pokusov sa experimentálna pravdepodobnosť približuje teoretickej - Bernoulliho schéma (jav A s pravdepodobnosťou p nastane pri n opakovaniach náhodného pokusu práve k-krát): $P_k^n = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ - očakávaná hodnota náhodnej premennej X s možnými výstupmi $x_1, \dots, x_n$, ktorých zodpovedajúce pravdepodobnosti sú $p_1, \dots, p_n$: $E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$
	Matematické reprezentácie - tabuľka početností, stromový graf a jednotkový štvorec - plocha, dĺžka, ako vizuálna reprezentácia pravdepodobnosti - slovný a symbolický opis pravdepodobnostnej situácie - množinové diagramy	Matematické modelovanie - identifikácia situácií, v ktorých je vhodné použiť pravdepodobnostný model, a rozpoznanie typu náhodnosti v reálnom kontexte - výber a použitie vhodného prístupu k pravdepodobnosti (klasický, frekvenčný, subjektívny, geometrický) podľa povahy problému a dostupných informácií - modelovanie zložených náhodných situácií využitím pravidiel pre sčítanie a násobenie pravdepodobností - využitie pravdepodobnosti opačného javu na zefektívnenie riešenia zložitejších modelov - simulácia náhodných javov pomocou digitálnych technológií na experimentálne odhadovanie pravdepodobnosti	Matematická komunikácia a argumentácia - uvedenie príkladov náhodných javov a pokusov z reálneho života - posúdenie správnosti využitia pravdepodobnosti v kontexte realistickej situácie - argumentovanie pomocou pravdepodobnosti pri rozhodovaní, odhade rizika alebo hodnotení tvrdení v médiách - vysvetlenie vzťahov pre doplnkovú pravdepodobnosť a pre súčet pravdepodobností navzájom sa vylučujúcich javov na základe relatívnej početnosti - argumentovanie, prečo v spojitých modeloch pravdepodobnosti (geometrická pravdepodobnosť) jav s pravdepodobnosťou 0 neznamená automaticky nemožný jav

		- porovnanie hodnôt experimentálnej a teoretickej pravdepodobnosti - zmena hodnoty pravdepodobnosti na základe novej informácie s využitím podmienenej pravdepodobnosti aj v kontexte princípov fungovania umelej inteligencie - modelovanie rozhodovania v realistických situáciách (aj s finančným kontextom) s neistým výsledkom pomocou očakávanej hodnoty	- rozhodnutie o - o závislosti javov A, B, ak pozná $P(A), P(B)$ a $P(A \cap B)$ - o správnosti použitia rovnosti $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ na základe rozhodnutia o nezávislosti javov - o správnosti použitia rovnosti $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ na základe rozhodnutia o nezlučiteľnosti javov - vysvetliť vlastnosti pravdepodobnosti pomocou množinových diagramov
	Postupy - určenie pravdepodobnosti ako pomeru počtu všetkých priaznivých a počtu všetkých možností - nájdenie doplnkovej pravdepodobnosti - určenie pravdepodobnosti súčasného výskytu nezávislých javov - určenie pravdepodobnosti zjednotenia nezlučiteľných javov		

2.5. Štatistika	Pojmy (úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách) - údaj, hodnota, aritmetický priemer, medián, najmenšia (minimálna) a najväčšia (maximálna) hodnota, frekvenčná tabuľka/graf - štatistický súbor, štatistický znak (kvantitatívny a kvalitatívny) - absolútna, relatívna a kumulatívna početnosť - odľahlá (extrémna) hodnota - charakteristiky polohy: vážený priemer, modus, percentil, kvartily, aritmetický priemer, geometrický priemer, harmonický priemer - charakteristiky variability: variačné rozpätie, rozptyl, smerodajná odchýlka, medzikvartilové rozpätie - korelácia ako miera štatistickej závislosti, korelačný koeficient, príčinná súvislosť (kauzalita) - základný súbor, výberový súbor, náhodný výber - rozdelenie relatívnej početnosti, normálne rozdelenie, binomické rozdelenie	Vzťahy (úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách) - vážený priemer čísel $x_1, \dots, x_n$ so zodpovedajúcou početnosťou jednotlivých čísel k_1 (početnosť x_1), ..., k_n (početnosť x_n): $\bar{x} = \frac{k_1x_1+k_2x_2+\dots+k_nx_n}{k_1+k_2+\dots+k_n}$ - geometrický priemer čísel $x_1, \dots, x_n$: $\bar{x}_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$ - harmonický priemer čísel $x_1, \dots, x_n$: $\bar{x}_H = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}}$ - rozptyl čísel $x_1, \dots, x_n$, ktorých aritmetický priemer je $\bar{x}$: $\sigma^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\dots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$ - smerodajná odchýlka čísel $x_1, \dots, x_n$, ktorých aritmetický priemer je $\bar{x}$: $\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\dots+(x_n-\bar{x})^2}{n}}$	
	Matematické reprezentácie - bodový graf na číselnej osi na zobrazenie rozdelenia diskretných dát - stonkový a listový diagram vhodný na rýchlu vizuálnu kontrolu rozdelenia a identifikáciu odľahlých hodnôt - tabuľka početností ako prehľadná reprezentácia dát a ako základ pre tvorbu grafov a výpočet charakteristík polohy a variability - histogram na zobrazenie rozdelenia spojitých alebo zoskupených dát - infografika ako vizuálne prepojenie dát s grafickými prvkami a symbolmi - škatuľový graf na zobrazenie polohy, variability, asymetrie a extrémov pomocou kvartilov - bodový graf na zobrazenie trendu a korelačnej závislosti medzi dvoma znakmi s využitím digitálnych technológií	Matematické modelovanie - identifikácia problémov riešiteľných štatistikou - návrh a realizácia štatistického prieskumu: formulácia otázok, zber, spracovanie a analýza dát a interpretácia hodnôt jednotlivých štatistických charakteristík - usporiadanie a prevod surových dát do tabuliek početností aj s intervalovým triedením - výber vhodných štatistických charakteristík (vrátane rôznych typov priemeru a iných stredných hodnôt) podľa typu dát, rozdelenia, kontextu a odľahlých hodnôt a cieľa analýzy - interpretácia údajov z tabuliek, diagramov a grafov opisujúcich rozdelenie početností alebo pravdepodobností v kontexte reálnej situácie - identifikácia odľahlých hodnôt, chýb a nezrovnalostí v dátach a rozhodnutie o ich ponechaní, oprave alebo vylúčení podľa kontextu a cieľa analýzy	Matematická komunikácia a argumentácia - interpretácia informácií z rôznych reprezentácií so zameraním na trendy, extrémny a polohu a variabilitu dát v kontexte reálnej situácie s využitím digitálnych technológií - vysvetlenie vzťahu medzi priemerom, mediánom a rozdelením údajov (symetria, asymetria) - argumentácia potreby využívania rôznych typov priemeru a iných stredných hodnôt - rozhodnutie na základe tvaru histogramu, či môže ísť o normálne rozdelenie - zdôvodnenie vhodnosti/nevhodnosti výberu štatistickej charakteristiky polohy aj v kontexte vplyvu odľahlých hodnôt na jednotlivé charakteristiky - argumentácia, prečo je zvolený graf informatívny alebo zavádzajúci - kritické čítanie grafov a infografík (aj s finančným kontextom: vývoja cien, inflácie, miezd, úrokových

		- využitie normálneho a binomického rozdelenia na modelovanie náhodných javov a riešenie praktických problémov - odhad podielu hodnôt nachádzajúcich sa v zadanom okolí priemeru alebo mimo neho na základe priemeru a smerodajnej odchýlky (Čebyševova nerovnosť)	mier alebo zadĺženosti) s cieľom zistiť informácie a odhaliť možné manipulácie - posúdenie spoľahlivosti tvrdení podľa veľkosti a náhodnosti výberu, spôsobu zberu dát a použitej metodiky - obhajoba záverov s uvedením predpokladov, obmedzení a možných zdrojov chýb - diskusia o zodpovednom používaní štatistiky v médiách, výskume a technológiách - argumentovanie, prečo môže byť výber nereprezentatívny alebo skreslený - formulácia protipríkladov nepravdivých tvrdení o vzťahoch medzi rôznymi strednými hodnotami súboru - vysvetliť na konkrétnych príkladoch pojmy korelácia, normálne rozdelenie, binomické rozdelenie - rozlišovanie medzi koreláciou a kauzalitou pri hodnotení vzťahu veličín - uvádzanie príkladov náhodných dejov, ktoré je možné modelovať normálnym rozdelením a dejov, ktoré takto modelovať možné nie je
	Postupy - intervalové triedenie dát - určenie aritmetického priemeru, modusu, mediánu aj využitím funkcií tabuľkového kalkulátora - manuálna konštrukcia jednoduchých reprezentácií (bodový graf, stonkový a listový diagram) pre malé dátové súbory - určenie rozptylu, smerodajnej odchýlky daného súboru s využitím funkcií tabuľkového kalkulátora - digitálna konštrukcia korelačného grafu, nájdenie korelačného koeficientu a interpretácia výsledku - generovanie histogramu a škatuľového grafu s využitím na to určených digitálnych aplikácií		

3. Geometria a meranie

3.1 Planimetria	Pojmy (úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)	Vzťahy (úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)		
	- rovnobežné a rôznobežné priamky, uhol, ramená uhla, vrchol uhla; priamy, pravý, ostrý, tupý, uhol väčší ako priamy; os uhla; vrcholový, susedný, striedavý a súhlasný uhol, vnútorný a vonkajší uhol mnohouholníka - trojuholník (vrcholy, strany), pravouhlý, ostrouhlý a tupouhlý trojuholník; rovnostranný, rovnoramenný, rôznostranný trojuholník; základňa a ramená rovnoramenného trojuholníka, odvesny a prepona pravouhlého trojuholníka, významné prvky trojuholníka (výška, päta výšky, ťažnica, ťažisko, priesečník výšok), trojuholníková nerovnosť - štvoruholník, rovnobežník, pravouholník (štvorec, obdĺžnik), kosoštvorec, kosodĺžnik, lichobežník (pravouhlý, rovnoramenný, všeobecný), základňa, rameno, výška lichobežníka; mnohouholník; pravidelný šesťuholník, pravidelný osemuholník - os úsečky, os uhla; Tálesova kružnica - kružnica a kruh (stred, polomer, priemer), kružnicový oblúk, dotyčnica - bod, priamka, polpriamka, rovina, polrovina - polkružnica, kruhový výsek, kruhový odsek, medzikružie, tetiva, sečnica, nesečnica, stredový a obvodový uhol - vzdialenosť bodu od priamky - osová a stredová súmernosť, stred súmernosti, os súmernosti, vzor a obraz - osovo a stredovo súmerné útvary; zhodné a podobné trojuholníky, pomer/koefficient podobnosti - zhodné zobrazenia: posunutie, otočenie - podobné zobrazenie: rovnoľahlosť	- priesečník osí uhlov strán trojuholníka - priesečník ťažníc trojuholníka (ťažisko) - priesečník výšok trojuholníka (ortocentrum) - vzťah medzi stredovým a obvodovými uhlami, prislúchajúcimi k tej istej tetive - Euklidove vety: V pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole C sú dané strany a, b, c, bod P, ktorý je päťou výšky v na stranu AB a úseky $c_a = PB$, $c_b = AP$, kde $c = c_a + c_b$. Potom platí $v^2 = c_a \cdot c_b$ (Euklidova veta o výške) $a^2 = c \cdot c_a$ (Euklidova veta o odvesne) $b^2 = c \cdot c_b$ (Euklidova veta o odvesne) - súčet veľkostí vnútorných uhlov konvexného n-uholníka je $(n - 2) \cdot 180^\circ$ - súčet veľkostí vonkajších uhlov konvexného n-uholníka je 360°		
	Matematické reprezentácie - grafické znázornenie geometrických útvarov - geometrický opis a načrtnutie/narysovanie množiny bodov s danou vlastnosťou, typu • body, ktorých vzdialenosť od daného bodu je rovná, menšia (väčšia) ako dané kladné číslo • body, ktorých vzdialenosť od danej priamky je rovná, menšia (väčšia) ako dané kladné číslo • body, ktorých vzdialenosť od jedného bodu je väčšia ako od druhého bodu	Matematické modelovanie - prevádzanie realistických situácií do planimetrických modelov - použitie množín bodov s danou vlastnosťou pri riešení konštrukčných úloh a úloh s realistickým kontextom - konštrukcia trojuholníka pomocou množín bodov s danou vlastnosťou (typu strana, uhol, výška; strana, uhol, ťažnica) aj s možnosťou využitia vhodných digitálnych nástrojov	Matematická komunikácia a argumentácia - vysvetlenie postupu konštrukcie krok za krokom slovné a matematickou symbolikou (náčrt, rozbor, postup konštrukcie, konštrukcia, záver, diskusia a skúška) - vysvetlenie vzťahov pre výpočet obsahov rovinných útvarov - vysvetlenie myšlienky približného výpočtu obsahu/obvodu kruhu využitím vpísaných a opísaných n-uholníkov	

	- body, ktorých vzdialenosť od jednej danej priamky je väčšia ako od druhej danej priamky body, z ktorých vidieť danú úsečku pod daným uhlom	- konštrukcia dotýčnice ku kružnici z daného vonkajšieho bodu - aplikovanie geometrických zobrazení (osová a stredová súmernosť, posunutie, otočenie) aj v praktických situáciách - využívanie mierky a rovnoľahlosti aj pri riešení problémov z praxe konštrukcie využitím zhodných a podobných zobrazení konštrukcia spoločných dotýčníc dvoch kružníc	vysvetlenie odvodenia Euklidových viet dôkaz vzťahu medzi stredovým a obvodovým uhlami dôkaz: - osi uhlov trojuholníka sa pretínajú v jednom bode - osí strán trojuholníka sa pretínajú v jednom bode - ťažnice sa pretínajú v jednom bode - výšky v trojuholníku sa pretínajú v jednom bode
	Postupy - zobrazenie útvaru v danom zhodnom a podobnom zobrazení konštrukcia úsečky iracionálnej dĺžky použitím Euklidových viet alebo Pytagorovej vety		

3.2 Trigonometria	Pojmy (úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách) sínus, kosínus, tangens	Vzťahy (úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách) - goniometrické funkcie v pravouhlom trojuholníku: V pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole C, uhlami $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ platí: $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{a}{c}$, $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{b}{c}$ - obsah trojuholníka ABC, v ktorom strany s dĺžkami a, b zvierajú uhol γ, je $S(ABC) = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \gamma$ sínusová veta (rozšírená sínusová veta): V trojuholníku ABC platí $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$, kde R je polomer kružnice opísanej trojuholníku ABC kosínusová veta: V trojuholníku ABC platia rovnosti: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$		
	Matematické reprezentácie slovný opis, náčrt trojuholníka s vyznačenými údajmi a symbolický zápis vzťahov	Matematické modelovanie - modelovanie realistických situácií pomocou trigonometrie - určovanie neznámych dĺžok a uhlov z ostatných zadaných údajov	Matematická komunikácia a argumentácia vysvetlenie výpočtu obsahu trojuholníka využitím dĺžok dvoch strán a sínusu uhla, ktorý zvierajú odvodenie sínusovej a kosínusovej vety a posúdenie ich využitia pri riešení problémov v praxi	

	- aplikácia goniometrie v meraní vzdialeností neprístupných miest - modelovanie situácií merania vzdialeností pomocou náčrtu, meraných údajov a vhodného digitálneho nástroja	
Postupy	- (približné) určenie obvodu a obsahu narysovaných trojuholníkov, n-uholníkov, kruhov a ich častí - dopočítanie chýbajúceho údaje pomocou trigonometrie	

3.3 Stereometria	Pojmy (úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách) - kocka, kváder, hranol, ihlan, vrchol, hrana, stena, výška telesa, stenová a telesová uhlopriečka - valec, kužeľ, guľa (stred, polomer, priemer), podstava, plášť, sieť telesa - pohľad spredu, zhora a zboku - teleso (jednoduché a zložené), hranol (kolmý, pravidelný, n-boký), ihlan (pravidelný, n-boký), guľová plocha - nárys, pôdorys, bokorys - (voľné) rovnobežné premietanie - mimobežné priamky - priesečnica dvoch rovín, rez telesa rovinou - uhol priamky s rovinou, uhol dvoch rovín - vzdialenosť bodu od priamky a od roviny	Vzťahy (úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách) - zachovanie deliaceho pomeru a rovnobežnosti vo voľnom rovnobežnom premietaní - vzťahy pre výpočet objemu a povrchu telies: Nech V je objem, S povrch, Q obsah plášťa, S_p obsah podstavy, v výška telesa. Potom platí: ○ hranol: $V = S_p v$, $S = 2S_p + Q$ ○ ihlan: $V = \frac{1}{3} S_p v$, $S = S_p + Q$ ○ valec: $V = \pi r^2 v$, $S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$ ○ kužeľ (rotačný): $V = \frac{1}{3} \pi r^2 v$, $S = \pi r^2 + \pi r s$ (kde s je dĺžka strany kužeľa, $s^2 = r^2 + v^2$) ○ guľa: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$, $S = 4\pi r^2$
	Matematické reprezentácie:	Matematické modelovanie

	- nárys, pôdorys a bokorys telies - zobrazenie telies vo voľnom rovnobežnom premietaní - siete telies	- transformovanie realistických situácií do priestorových geometrických modelov a ich zobrazovanie vo voľnom rovnobežnom premietaní aj s využitím digitálnych technológií - využívanie objemu a povrchu telies pri riešení realistických úloh - aplikácia stereometrických modelov pri riešení realistických problémov - aplikácia geometrie na guľovej ploche a jej geografické modely - modelovanie priestorovej situácie pomocou rezov telies a prienikov rovín	- zdôvodnenie, či daná sieť zodpovedá danému telesu - zdôvodnenie konštrukcie rovinného rezu kocky, kvádra, hranolu, ihlanu - zovšeobecnenie princípu výpočtu objemu a povrchu telies (podstava, výška, plášť) - zdôvodnenie vzájomnej polohy bodov, priamok a rovín v priestore - odvodenie vzorca pre výpočet objemu valca, kužeľa a gule pomocou Cavalieriho princípu - vysvetlenie hlavnej myšlienky pre odvodenie vzorca na výpočet povrchu gule
	Postupy - zostrojenie obrazu jednoduchého telesa vo voľnom rovnobežnom premietaní - zostrojenie rovinného rezu kocky, kvádra, hranolu, ihlanu rovinou určenou tromi ležiacimi v rovinách stien, z ktorých aspoň dva ležia v tej istej stene daného telesa (náčrtom, rysovaním alebo pomocou digitálnych nástrojov) - určenie vzájomnej polohy priamok a rovín v priestore - určenie vzdialenosti bodu od priamky a od roviny - konštrukcia rezu kocky rovinou určenou tromi ľubovoľnými bodmi - určenie polohových a metrických vlastností priamky a roviny v priestore - určenie uhla dvoch priamok, priamky s rovinou, uhol dvoch rovín v priestore		

3.4 Analytická geometria	Pojmy (úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách) - orientovaná úsečka, súradnice bodu, vektor, opačný vektor, smerový a normálový vektor - pravouhlý systém súradníc, sústava súradníc v rovine a priestore - súradnice bodu a vektora na priamke, súradnice bodu a vektora v rovine a priestore - rovnobežné, rôznobežné, kolmé priamky, roviny - kružnica a ďalšie kužeľosečky (elipsa, parabola, hyperbola) - skalárny súčin vektorov	Vzťahy (úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách) - veľkosť vektora $\vec{u}(u_1, u_2)$ v rovine je $\vec{u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ - vzdialenosť dvoch bodov, dĺžka úsečky - vzťah medzi smerovým a normálovým vektorom priamky v rovine - vzťahy medzi smerovými/normálovými vektormi rovnobežných priamok/rovín - súradnice stredu $S[x_S, y_S]$ úsečky AB, kde $A[x_A, y_A]$, $B[x_B, y_B]$, platí $x_S = x_A + \frac{1}{2}(x_B - x_A) = \frac{x_A + x_B}{2}, y_S = y_A + \frac{1}{2}(y_B - y_A) = \frac{y_A + y_B}{2}$ - súradnice bodu $M[x_M, y_M]$, ktorý rozdeľuje úsečku AB v pomere $AM : MB = m : n$, platí $x_M = x_A + \frac{m}{m+n}(x_B - x_A) = \frac{nx_A + mx_B}{m+n}$, $y_M = y_A + \frac{m}{m+n}(y_B - y_A) = \frac{ny_A + my_B}{m+n}$
--------------------------	---	--

- vzdialenosť bodu $B[x_B, y_B]$ od priamky $p: ax + by + c = 0$ je $ B; p = \frac{ ax_B + by_B + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$ - vzdialenosť bodu $B[x_B, y_B, z_B]$ od roviny $\rho: ax + by + cz + d = 0$ je $ B; \rho = \frac{ ax_B + by_B + cz_B + d }{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$		
Matematické reprezentácie vektor: - ako množina všetkých orientovaných úsečiek s rovnakým smerom a veľkosťou - ako reprezentácia posunutia - ako usporiadaná dvojica/trojica čísel priamka: - parametrické vyjadrenie v rovine a priestore - smernicový tvar rovnice a súvis s grafom lineárnej funkcie - všeobecná rovnica rovina: - parametrické vyjadrenie - všeobecná rovnica kružnica a ďalšie kužeľosečky (os kužeľosečky rovnobežná s niektorou súradnicovou osou): - predstava kužeľosečky ako rezu kužeľovej plochy rovinou - všeobecný a stredový tvar rovnice kružnice - všeobecný a vrcholový tvar rovnice paraboly - všeobecný a stredový tvar rovnice elipsy a hyperboly - grafické znázornenie kružnice, paraboly, elipsy, hyperboly	Matematické modelovanie - aplikácia vektorov a operácií s nimi pri riešení realistických úloh - riešenie metrických a polohových úloh využitím vhodne zvolených tvarov rovníc priamok a rovín - riešenie úloh s matematickým a realistickým kontextom využívajúci rovnice kužeľosečiek - grafické znázornenie priamky, kružnice, paraboly, elipsy a hyperboly v súradnicovej sústave s využitím digitálnych nástrojov	Matematická komunikácia a argumentácia - zdôvodnenie vzťahov medzi smerovými a normálovými vektormi priamok a rovín, najmä pri určovaní ich rovnobežnosti, rôznobežnosti a kolmosti - odvodenie súradníc bodu rozdeľujúceho úsečku v danom pomere - argumentovanie výberu vhodného analytického vyjadrenia priamky alebo roviny (smernicové, parametrické, všeobecné) v závislosti od typu úlohy a požadovaného postupu riešenia - vysvetlenie prepojenia sústav dvoch/troch lineárnych rovníc s ich grafickou reprezentáciou - prepojenie analytickej a grafickej reprezentácie - zdôvodnenie súvislosti medzi rovnicou geometrického útvaru a jeho polohou či tvarom v súradnicovej rovine alebo priestore - odvodenie stredových tvarov rovníc kružnice, paraboly, elipsy a hyperboly - identifikácia typu kužeľosečiek na základe ich rovnice - definovanie kužeľosečiek ako množiny všetkých bodov roviny s danou vlastnosťou a ich použitie pri argumentácii a riešení úloh
Postupy - určovanie súradníc bodov a vektorov a ich použitie pri riešení úloh v rovine a priestore - výpočet dĺžky úsečky a súradníc stredu úsečky		

- vykonávanie základných operácií s vektormi (súčet, rozdiel, násobenie číslom) a **používanie skalárneho súčinu vektorov v úlohách**
- riešenie polohových úloh: vzájomné polohy bod a priamka, **bod a rovina, priamka a rovina**, dve priamky v rovine a v priestore, **dve roviny**
- riešenie metrických úloh: vzdialenosť bodu od priamky v rovine a v priestore, **vzdialenosť bodu od roviny**, vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok v rovine, **vzdialenosť priamky od roviny, vzdialenosť dvoch rovnobežných rovín**
- zostavenie rovnice kužeľosečky (kružnica, **parabola, elipsa, hyperbola**) podľa zadaných základných charakteristík s obmedzením sa na tie, ktorých os je rovnobežná s niektorou z osí súradnicového systému

4. Základy formálnej matematiky

4.1 Výroky, kvantifikátory, úsudky	Pojmy (úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)		Vzťahy (úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)	
	- výrok, zložený výrok, úsudok, hypotéza, tvrdenie (pravdivé a nepravdivé), definícia - logické spojky, negácia, logické a, logické alebo (vylučovacie a nevylučovacie alebo), implikácia, ekvivalencia, nutná a postačujúca podmienka - obmena implikácie, obrátená implikácia - kvantifikátor, existenčný a všeobecný kvantifikátor		- implikácia $A \Rightarrow B$ je ekvivalentná s implikáciou $B' \Rightarrow A'$ - výroky A, B sú ekvivalentné, ak platia obe implikácie $A \Rightarrow B, B \Rightarrow A$ - pravdivosť konjunkcie, disjunkcie, implikácie, ekvivalencie a negácie - negácia konjunkcie, disjunkcie (De Morganove pravidlá) a implikácie - negácia všeobecného výroku (protipríklad) a existenčného výroku - negácia výrokov o počte objektov s danou vlastnosťou (typu „aspoň pre tri n platí...“)	
	Matematické reprezentácie	Matematické modelovanie	Matematická komunikácia a argumentácia	
	- zápis výrokov, kvantifikátorov a logických spojok pomocou matematických symbolov - zápis pravdivostných hodnôt zložených výrokov do prehľadnej tabuľky - grafické znázornenie logických spojok a základných typov úsudkov pomocou množinových diagramov	- prepis pravidiel zo života (zmluvy, zákony, pravidiel spoločenských hier) využitím logických spojok a kvantifikátorov a overenie ich splnenia - vyvodzovanie jednoznačných záverov postupným vylučovaním možností v logických úlohách s obmedzeným počtom parametrov (typu Einsteinove hádanky) - vytváranie podmienok pomocou logických spojok pri spracovaní údajov v tabuľkovom kalkulátore	- rozlíšenie platného a neplatného úsudku - odhalenie logických chýb (nesprávna negácia, zámena implikácie za ekvivalenciu) - posúdenie správnosti tvrdení odvodených z jednoduchých návodov, odborných textov, nariadení a pravidiel - na konkrétnych príkladoch vysvetlenie rozdielu medzi vylučovacím a nevylučovacím chápaním spojky „alebo“ - vysvetlenie rozdielov medzi definíciou a vetou, predpokladom a záverom vety - vysvetlenie súvislosti medzi množinovými operáciami a logickými spojkami - vysvetlenie ekvivalencie implikácie a obmeny implikácie	

		- argumentácia pravidiel pre negáciu jednoduchých, zložených a kvantifikovaných výrokov - vysvetlenie správnosti/nesprávnosti úsudku
	Postupy - negácia výroku s kvantifikátormi vrátane zamlčaného všeobecného kvantifikátoru - určenie pravdivosti zloženého výroku v konkrétnej situácii s najviac dvoma logickými spojkami	

4.2 Množiny a operácie s nimi	Pojmy (úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách) - množina, konečná, nekonečná, prázdna - podmnožina, disjunktné množiny, prvok množiny - zjednotenie, prienik, doplnok, rozdiel - interval		Vzťahy (úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách) - operácie s konečnými množinami - pre počet prvkov zjednotenia dvoch konečných množín A, B platí: $A \cup B = A + B - A \cap B$ - De Morganove pravidlá $(A \cup B)' = A' \cap B', (A \cap B)' = A' \cup B'$
	Matematické reprezentácie - reprezentácia množiny vymenovaním jej prvkov alebo určením ich charakteristickej vlastnosti - grafické znázornenie vzťahov medzi množinami pomocou Vennových diagramov - zápis intervalov pomocou symbolov a ich znázornenie na číselnej osi	Matematické modelovanie - použitie intervalov na vyjadrenie obmedzení a povolených hodnôt veličín v kontexte rôznych situácií - vyjadrenie a interpretácia situácií, v ktorých musí byť súčasne splnených viac podmienok, pomocou prieniku intervalov, vrátane využitia digitálneho nástroja na filtrovanie údajov podľa viacerých kritérií - vyhľadávanie duplícít, identifikácia chýbajúcich položiek v zoznamoch údajov aj využitím tabuľkového kalkulátora - riešenie kontextových úloh o počte prvkov v skupinách na základe realistických údajov	Matematická komunikácia a argumentácia - vysvetlenie pojmov podmnožina, prienik, zjednotenie, rozdiel, doplnok množín na konkrétnych príkladoch - prepis textových podmienok obsahujúcich slová „a zároveň“, „alebo“, „okrem“ do množinových symbolov - vysvetlenie: pre počet prvkov zjednotenia dvoch množín platí: $A \cup B = A + B - A \cap B$ - argumentovanie platnosti De Morganových pravidiel pre operácie s množinami
	Postupy - vykonanie operácií (prienik, zjednotenie, rozdiel, doplnok) s konkrétnymi množinami a intervalmi - určenie počtu prvkov zjednotenia a prieniku dvoch konečných množín v kontexte konkrétnych realistických situácií		

4.3 Základné typy dôkazov	Pojmy (úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)	
	- protipríklad, priamy dôkaz, nepriamy dôkaz , dôkaz sporom , matematická indukcia	
	Matematické reprezentácie - reprezentovanie reťazca argumentov slovne, schematicky, symbolicky	Matematická komunikácia a argumentácia - rozlíšenie medzi overením tvrdenia na konečnom počte príkladov a matematickým dôkazom platným pre všetky prípady - rozlíšenie medzi argumentáciou a dôkazom - identifikácia chybného alebo chýbajúceho kroku v predloženom odôvodnení - identifikácia chyby v úsudkoch a argumentácii - rozlíšenie významu pojmu dôkaz v matematike a v iných odboroch (právo, prírodné vedy, história), kde sa týmto slovom označuje zhoda indícií alebo experimentálne overenie - vysvetlenie úlohy protipríkladu pri dôkaze neplatnosti všeobecného tvrdenia - vysvetlenie súvisu ekvivalentných a dôsledkových úprav rovníc a nerovníc s logickými vzťahmi ekvivalencie a implikácie - posúdenie správnosti argumentov generovaných aj umelou inteligenciou k tvrdeniam špecifikovaných v ďalších obsahových komponentoch - opis logických krokov pri priamom dôkaze, nepriamom dôkaze a dôkaze sporom a vysvetlenie na konkrétnom príklade