Vzdelávací štandard
a Cieľové požiadavky na maturitu z matematiky

Úvod

Dynamické technologické a spoločenské zmeny zásadne transformovali spôsoby využívania matematiky v praxi. Tým prirodzene zvýšili nároky na matematickú gramotnosť celej populácie. Tieto zmeny reflektuje kurikulárna reforma na základnej škole a predkladané vzdelávacie štandardy z matematiky pre stredné školy na ňu nadväzujú. Sú koncipované tak, aby všetci žiaci, bez ohľadu na svoje ďalšie smerovanie, dokázali efektívne profitovať zo získaného matematického poznania. Zároveň pripravujú žiakov stredoškolských škôl na vysokoškolské štúdium STEM odborov. To je podmienené nielen rozvinutým matematickým myslením a primeranými matematickými zručnosťami, ale predovšetkým hlbokým porozumením matematike ako tvorivej ľudskej aktivite zameranej na budovanie porozumenia kvantitatívnym a štrukturálnym javom.

Naplnenie takéhoto cieľa vyžaduje vyrovnať sa s vnímanou *náročnosťou* matematiky, ktorej príčina spočíva najmä v jej abstraktnosti, sprevádzanej opakovaným nárastom komplexnosti. Avšak práve tieto črty matematiky sú tiež podstatou jej *krásy* a *užitočnosti*. Stredoškolské matematické kurikulum má zabezpečiť, aby komplexnosť matematiky nebola pre žiakov bariérou v jej využívaní pri riešení otázok bežného života či pracovných výziev naprieč rôznymi zamestnaniami. Aktívnym žiackym bádaním, argumentovaním, zovšeobecňovaním, modelovaním realistických situácií má vytvárať priestor, v ktorom môžu žiaci matematike porozumieť, objavovať jej zákonitosti a oceňovať jej krásu.

Vzdelávací štandard preto musí citlivo narábať s nárastom komplexnosti a mierou abstrakcie, ktorú žiakom predkladá. Zámerom je, aby matematika, ktorú majú žiaci zvládnuť, mohla byť produktom ich vlastnej matematickej aktivity v triede.

Z vyššie uvedených argumentov vyplýva potreba **dvojúrovňového modelu matematického kurikula**, ktorý rozlišuje základnú a pokročilú úroveň. Pričom **rozdiel medzi úrovňami je v miere abstrakcie a komplexnosti porozumenia, ktoré sa od žiakov očakávajú.** Takáto odlišnosť nie je dosiahnuteľná jednoduchým kategorizovaním tém na základné a pokročilé. V tomto kurikule preto nie sú matematické obsahy rozdelené medzi úrovne tak, že niektoré tematické celky patria výlučne do jednej a iné do druhej. Obe úrovne sú koncipované ako dve na seba nadväzujúce etapy, v ktorých sa k vybraným matematickým obsahom žiaci opakovane vracajú – najprv na základnej úrovni a neskôr s vyššou mierou abstrakcie, formalizácie a komplexnosti. Druhá etapa tak nemá byť len rozšírením o nové témy, ale predovšetkým prehĺbením a rozvinutím už získaného matematického porozumenia. Takto koncipované kurikulum má umožniť, aby bola matematika zrozumiteľnejšia, zmysluplnejšia a využiteľnejšia pre všetkých žiakov.

Základná úroveň je určená pre všetkých žiakov ako súčasť všeobecného vzdelania. Je zameraná na rozvoj matematickej gramotnosti, porozumenie základným pojmom, postupom a reprezentáciám. Podporí vzdelávanie v odboroch, ktoré nevyžadujú pokročilú matematiku a schopnosť používať matematiku v bežných

životných a pracovných situáciách potrebných na občianske fungovanie. Jej obsah je dimenzovaný tak, aby bol zvládnuteľný pri dotácii 12 hodín týždennej dotácie počas štúdia. Zároveň sa počíta s voľnosťou do 5 % na zaradenie tém špecifických pre odborné zameranie školy alebo na prehĺbenie vybraných častí učiva.

Pokročilá úroveň je určená pre žiakov, ktorí plánujú pokračovať v štúdiu technických, prírodovedných, ekonomických alebo matematických odborov. Je zameraná na kultivovanie matematického vyjadrovania, používanie matematickej symboliky, porozumenie princípom dokazovania a využívanie pokročilejších matematických postupov a nástrojov pri modelovaní realistických situácií. V porovnaní so základnou úrovňou sa vyznačuje vyššou mierou komplexnosti, abstrakcie a formalizácie matematického poznania, na niektorých miestach ide aj o rozšírenie obsahu. Obsah pokročilej úrovne je dimenzovaný tak, aby bol zvládnuteľný pri týždennej dotácii 18 hodín počas štúdia, pričom sa tiež počíta s priestorom na rozšírenie obsahu vo väzbe na potreby žiakov a zameranie školy.

Obe úrovne sa zhodujú v zameraní na porozumenie, vnímanie zmysluplnosti matematiky a schopnosť matematizovať *realistické* situácie. Ani jedna z úrovní sa nemá obmedziť na nácvik algoritmov.

Realistické situácie pritom nemajú byť chápané iba ako kontext, do ktorého sa po osvojení matematického obsahu umiestnia úlohy na jeho precvičenie. **Realistické situácie** môžu vychádzať z reálneho sveta a skúseností žiakov, môžu však byť aj fiktívne, modelové alebo účelne vytvorené. Kľúčové je, že **si** ich **žiaci dokážu predstaviť a že im dávajú zmysel ako východisko pre matematizáciu**. Nie každá reálna situácia je zároveň realistická pre žiakov – najmä ak je vzdialená ich skúsenostiam alebo si ju nedokážu dostatočne predstaviť. I keď v kurikule nie je možné uvádzať konkrétne realistické situácie, na niektorých vhodných miestach explicitne uvádzame finančný kontext. Schopnosť robiť racionálne finančné rozhodnutia je dôležitou súčasťou života v súčasnej spoločnosti. Matematika k tomu poskytuje dôležité nástroje – umožňuje porovnávať možnosti, pracovať s údajmi, odhadovať dôsledky rozhodnutí a posudzovať ich výhodnosť a riziká. Tieto matematické nástroje prepojené s finančným kontextom musia byť dostupné čo najširšej populácií. Výber a podoba ďalších kontextov úloh majú zohľadňovať okrem iného aj zameranie konkrétneho študijného odboru.

Dôraz na **matematizovanie realistických situácií** vychádza z presvedčenia, že matematiku sa žiaci najlepšie učia jej aktívnym používaním – teda tým, že ju robia. Matematika je činnosťou oveľa viac než súborom poznatkov. „Robenie matematiky“ je v tomto dokumente charakterizované prostredníctvom pojmu **matematické praktiky**. Tie nepredstavujú ďalšie poznatky nad rámec obsahu, ale spôsoby, akými si žiak matematické poznanie osvojuje, a zároveň vyjadrujú požiadavky na to, čo má byť výsledkom matematického vzdelávania. Sú to činnosti, ktoré sú prirodzenou súčasťou matematickej práce pri matematizácii reality. V tomto dokumente ich kategorizujeme do troch skupín:

1. *Matematické reprezentácie* sú rôzne spôsoby zachytenia a vyjadrenia matematických pojmov a vzťahov. Zahŕňajú ich vytváranie, interpretáciu, prepájanie a posudzovanie ich vhodnosti vzhľadom na daný problém. Na úrovni strednej školy ide najmä o symbolické a grafické reprezentácie a o prechádzanie medzi nimi. **Na pokročilej úrovni sú reprezentácie abstraktnejšie a vo väčšej miere využívajú formálny matematický zápis.**
2. *Matematické modelovanie* je proces vytvárania, používania a posudzovania matematických modelov pri riešení problémov vychádzajúcich z realistických situácií. Zahŕňa analýzu situácie, vytvorenie modelu s využitím reprezentácie, spracovanie (vyriešenie) vytvoreného modelu, interpretáciu výsledkov a kritické posúdenie ich platnosti a obmedzení. Súčasťou modelovania je aj vedomé využívanie vhodných matematických alebo digitálnych nástrojov a posudzovanie vhodnosti vytvoreného modelu pre iné kontexty a situácie. V pokročilej úrovni sa modelovanie týka komplexnejších problémov prepájajúcich viaceré obsahové komponenty.

3. *Matematická komunikácia a argumentácia* zahŕňajú porozumenie matematickému jazyku, jeho presné používanie a jasné vyjadrovanie matematického uvažovania. Dôraz sa kladie na logickú konzistentnosť a štruktúru argumentácie pri zdôvodňovaní a kritickom posudzovaní tvrdení a riešení úloh. V základnej úrovni sa dôraz kladie na jednoduché neformálne zdôvodnenia vrátane formulácie protipríkladov. V pokročilej úrovni argumentácia zahŕňa tvorbu formálnych dôkazov, precízne používanie symbolických zápisov a definovanie vybraných pojmov.

Súčasťou kurikula nie sú len matematické praktiky, ale aj **vymedzenie matematického poznania (pojmov, vzťahov a postupov)**. Matematický obsah a matematické praktiky nie sú dve oddelené časti matematického vzdelávania. Kurikulum nepredpisuje konkrétny spôsob vyučovania, počíta však s tým, že matematické praktiky nebudú ďalšou vrstvou učiva, ktorú treba k obsahu dodatočne pridať a osobitne precvičovať. Majú byť spôsobom, akým žiaci matematické poznanie nadobudnú. Ak by sa najprv osvojoval obsah, a následne precvičovali praktiky, nebolo by možné vzdelávanie realizovať v rámci časovej dotácie. Matematické poznanie sa buduje prostredníctvom matematickej činnosti. Preto je uvedenie pojmov a vzťahov v kurikule nutné chápať v spojitosti s praktikami.

1. Ovládanie **pojmov** znamená, že žiak má vybudovanú korektnú predstavu o danom pojme, vie uviesť príklad, ktorý vhodne reprezentuje daný pojem, rozumie zadaniam úloh, v ktorých sa tieto pojmy vyskytujú, vie pojmy správne použiť pri formuláciách svojich odpovedí, ak to praktika vyžaduje, vie pojmy vysvetliť alebo definovať. Skutočnosť, že sa od žiakov nevyžaduje aktívna znalosť definície, neznamená, že ju učiteľ nemá vo vyučovaní využívať.
2. Ovládanie **vzťahov** znamená, že žiak ich vie správne a zmysluplne aplikovať pri riešení úloh, modelovaní a argumentácii a ak to praktika vyžaduje, tak aj korektne sformulovať, odvodiť či dokázať tvrdenie. To, že odvodenie tvrdenia nie je v praktike explicitne uvedené, neznamená, že sa s ním žiak nemá stretnúť.
3. Ovládanie **postupov** znamená bezchybné vykonávanie základných matematických algoritmov, výpočtov a štandardných postupov, zvládnutie rutinných úloh do takej miery, aby ich žiak vykonával plynule, efektívne a bez zbytočného kognitívneho preťaženia, schopnosť nielen mechanicky počítať, ale aj strategicky si zvoliť najvhodnejší postup pre konkrétny typ problému. Kurikulum nežiada automatizáciu všetkých postupov, algoritmov a metód riešení úloh. Automatizácia je požadovaná pri tých, ktorých plynulé používanie je potrebné pri ďalšom porozumení, riešení zložitejších matematických problémov resp. sú potrebné pre iné predmety. Osvojeniu a automatizácii postupov má predchádzať ich porozumenie.

Jednotlivé oblasti matematiky majú svoje špecifiká, zároveň sú však navzájom úzko prepojené a vzťahy medzi nimi tvoria prirodzenú súčasť matematického poznania. Matematický obsah je v tomto dokumente členený na štyri komponenty a ďalej na subkomponenty. Toto členenie však neurčuje poradie preberania tém ani neznamená, že sa majú vyučovať oddelene.

1. Čísla, výrazy a operácie s nimi
- 1.1 Množstvá, čísla a ich vlastnosti
- 1.2 Určovanie počtu prvkov konečných množín (Kombinatorika)
- 1.3 Výrazy a ich ekvivalencia
- 1.4 Rovnice a nerovnice

2. Funkcie, závislosti a práca s údajmi
- 2.1 Modely zmien a rastu
- 2.2 Funkcia ako matematický objekt, jej vlastnosti a transformácie
- 2.3 Periodické deje a cyklickosť
- 2.4 Pravdepodobnosť
- 2.5 Štatistika

3. Geometria a meranie
- 3.1 Planimetria
- 3.2 Trigonometria
- 3.3 Stereometria
- 3.4 Analytická geometria

4. Základy formálnej matematiky
- 4.1 Výroky, kvantifikátory, úsudky
- 4.2 Množiny a operácie s nimi
- 4.3 Základné typy dôkazov

Komponent **Čísla, výrazy a operácie s nimi** sa zameriava na porozumenie číslam, číselným množinám a ich štruktúre, odhadu a účelného využívania algebry pri riešení matematických a realistických problémov. Žiak pracuje s rôznymi zápismi čísel, posudzuje primeranú presnosť výpočtov a vyhodnocuje vplyv zaokrúhlenia na konečný výsledok. Uplatňuje rovnice, nerovnice a ich sústavy ako nástroj na algebraické modelovanie závislostí a riešenie optimalizačných úloh. Súčasťou komponentu je určovanie počtu možností pomocou kombinatorických pravidiel a aplikácia vlastností deliteľnosti prirodzených čísel, čo vedie k rozvíjaniu systematického myslenia a hlbšieho porozumenia štruktúre prirodzených čísel.

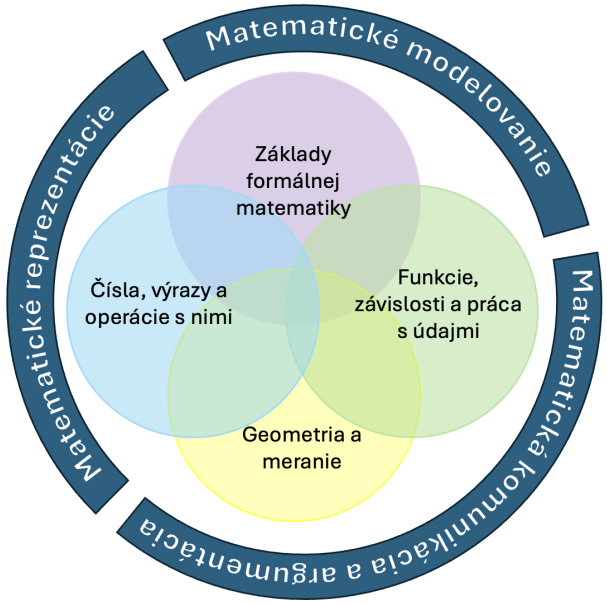
Komponent **Funkcie, závislosti a práca s údajmi** rozvíja funkčné myslenie so zameraním na skúmanie procesov zmeny, prácu s neistotou a dátovú gramotnosť. Žiak vníma funkciu ako vyjadrenie vzájomnej zmeny veličín (kovariácie), priradenie (korešpondenciu) aj ako samostatný matematický objekt. V oblasti štatistiky a pravdepodobnosti sa učí modelovať náhodné javy, kvantifikovať riziko pomocou očakávanej hodnoty, spracúvať a vizualizovať dáta a kriticky posudzovať štatistické zistenia s ohľadom na reprezentatívnosť vzorky a možné metodologické skreslenia.

Komponent **Geometria a meranie** rozvíja priestorovú predstavivosť a schopnosť účelnej voľby metodického aparátu pri riešení metrických a polohových úloh. Žiak využíva geometrické transformácie, množiny bodov danej vlastnosti, vektorový aparát a trigonometrické vzťahy na modelovanie realistických situácií. Na pokročilej úrovni spája syntetický a analytický prístup ku skúmaniu útvarov v rovine a priestore. **Dôraz sa kladie aj na dokazovanie vybraných tvrdení.**

Komponent **Základy formálnej matematiky** zabezpečuje prechod od intuitívneho uvažovania k formálnemu matematickému jazyku a deduktívnemu systému. Predovšetkým v rámci pokročilej úrovne si žiak osvojuje presnú terminológiu, množinový zápis, logické spojky a kvantifikátory. Učí sa štruktúrovane analyzovať matematické texty (rozlišovať definície, vety a príklady), posudzovať pravdivostné hodnoty zložených výrokov, formulovať ich negácie a vyvracať nepravdivé tvrdenia pomocou protipríkladov. Osvojuje si základné stratégie deduktívneho dokazovania a identifikuje chyby v argumentácii.

Tento dokument prepája ciele, obsah a matematické praktiky a ako jeden kompaktný celok reprezentuje *vzdelávací štandard* a *cieľové požiadavky na maturitu*.

V dokumente sú najprv uvedené všeobecné ciele predmetu, následne výkonový štandard spísaný ako ciele pre jednotlivé komponenty, v rámci ktorých je charakterizované, čo žiak vie alebo dokáže. Následne je uvedený obsahový štandard, ktorý je potrebné čítať v kontexte vyššie uvedených informácií a vo vzájomnej súvislosti matematického obsahu a matematických praktík (viď Obrázok 1). Bežný text predstavuje požiadavky základnej úrovne maturitnej skúšky a je určený pre všetkých žiakov. Text zvýraznený **tučným písmom** predstavuje požiadavky, ktoré pribúdajú navyše pre **pokročilú úroveň** maturitnej skúšky. V rámci tohto dokumentu sa používa označenia funkcií a množín podľa európskej normy č. ISO 80000-2 z roku 2019.



Obrázok 1. Mapa obsahových komponentov v matematickom vzdelávaní

Ciele predmetu

1. *Rozvíjať matematickú gramotnosť, ochotu a schopnosť používať matematiku v rôznych životných, spoločenských a odborných situáciách* – žiaci majú porozumieť základným matematickým pojmom a matematickým objektom, ktoré tieto pojmy opisujú. Majú porozumieť vzťahom a postupom tak, aby si vybudovali záujem a schopnosť využívať ich pri riešení problémov každodenného života, pri interpretácii údajov, rozhodovaní a modelovaní realistických situácií. Matematika sa má pre nich stať prirodzeným nástrojom orientácie v súčasnom svete založenom na dátach, technológiách a kvantitatívnych informáciách.
2. *Rozvíjať matematické myslenie založené na abstrahovaní, argumentácii, zovšeobecňovaní a dokazovaní* – vzdelávanie má viesť žiakov k chápaniu matematiky ako tvorivej ľudskej aktivity zameranej na budovanie a prehlbovanie porozumenia kvantitatívnym a štrukturálnym javom. **Na pokročilej úrovni žiaci začínajú interagovať s matematikou organizovanou ako logicky usporiadaný deduktívny systém.** Žiaci si majú rozvíjať schopnosť presne formulovať pojmy, analyzovať vzťahy medzi matematickými objektmi, kriticky posudzovať tvrdenia, identifikovať logické chyby a primerane veku vytvárať a hodnotiť matematické argumenty a dôkazy.

3. *Rozvíjať schopnosť matematicky reprezentovať, modelovať a riešiť problémy* – rozvíjať u žiakov schopnosť prepájať symbolické, grafické, numerické, geometrické a verbálne reprezentácie matematických objektov a situácií. Majú získavať schopnosť analyzovať problémy, vytvárať a testovať matematické modely, využívať vhodné stratégie a digitálne nástroje, interpretovať výsledky, kriticky posudzovať ich adekvátnosť ako aj primeranosť zvolených postupov.
4. *Kultivovať presné matematické vyjadrovanie a budovať procedurálnu plynulosť* – rozvíjať u žiakov schopnosť jasne komunikovať matematické myšlienky, zdôvodňovať svoje postupy a vecne obhajovať závery. Prostredníctvom bohatej matematickej komunikácie v triede majú zvládnuť efektívne používanie matematických postupov, algoritmov, symboliky a terminológie s dôrazom na presnosť, logickosť, porozumenie významu symbolov a primeranú mieru automatizácie.
5. *Vytvárať podmienky pre hlboké porozumenie matematike a diferencovaný rozvoj žiakov podľa ich vzdelávacích a profesijných potrieb* – matematické vzdelávanie má byť prístupné a zmysluplné pre všetkých žiakov, pričom má rešpektovať ich rozdielne budúce študijné a profesijné smerovanie. Základná úroveň má zabezpečiť všeobecnú matematickú gramotnosť a pripravenosť na občiansky a pracovný život, zatiaľ čo **pokročilá úroveň má pripraviť žiakov na štúdium STEM a príbuzných odborov prostredníctvom vyššej miery abstrakcie, formalizácie, a tým aj matematickej náročnosti**.

Výkonový štandard

Čísla, výrazy a operácie s nimi

Cieľ Č.1: Rozvíjať schopnosť pracovať s číslami v rôznych tvaroch a posudzovať primeranosť presnosti výpočtov v realistických situáciách a **rozšíriť chápanie pozičnej sústave.**

Žiak vie/dokáže:

- riešiť a vysvetľovať problémy využitím vlastností reálnych čísel a operácií s nimi v rôznych zápisoch, vrátane vedeckého zápisu,
- rozhodnúť o vhodnosti použitia presných alebo približných hodnôt pri výpočtoch a zhodnotiť možný vplyv chyby na výsledok,
- porovnávať reálne čísla v rôznych zápisoch a interpretovať ich vzájomné vzťahy v kontexte danej situácie.

Cieľ Č.2: Systematicky určovať počet možností v rôznych situáciách a používať vhodné kombinatorické stratégie.

Žiak vie/dokáže:

- analyzovať pravidlá výberu (závislosť od poradia, možnosť opakovania) a efektívne používať kombinatorické pravidlá súčtu a súčinu v situáciách, kde je mechanické vypisovanie neprehľadné a neefektívne,
- vyčísliť počet všetkých možností bez ich vynechania či opakovania.

Cieľ Č.3: Prehĺbenie porozumenia vlastnostiam prirodzených čísel a využiť deliteľnosť pri riešení matematických a realistických problémov.

Žiak vie/dokáže:

- zvoliť efektívny spôsob nájdenia NSD a NSN a aplikovať ho pri riešení realistických úloh,
- vysvetliť kritériá deliteľnosti a aplikovať ich v úlohách s rôznym kontextom,
- formulovať a odôvodniť jednoduché tvrdenia o deliteľnosti prirodzeným číslom.

Cieľ Č.4: Využívať rovnice a nerovnice na modelovanie a riešenie problémov a interpretovať ich riešenia v kontexte.

Žiak vie/dokáže:

- zostaviť rovnicu, nerovnicu, alebo ich sústavu ako model realistickej situácie, vyriešiť ju, zdôvodniť postup jej riešenia a interpretovať výsledok i počet riešení vzhľadom na kontext problému,
- **riešiť jednoduché optimalizačné problémy s realistickým kontextom, v ktorých je potrebné určiť najväčšiu alebo najmenšiu hodnotu premennej (veličiny) pri zadaných podmienkach.**

Funkcie, závislosti a práca s údajmi

Cieľ F.1: Rozvíjať funkčné myslenie pri modelovaní závislostí, skúmaní zmien a interpretácii vzťahov medzi veličinami aj v realistických kontextoch.

Žiak vie/dokáže:

- identifikovať funkciu ako pravidlo priradenia medzi vstupom a výstupom, ako vyjadrenie vzájomnej zmeny veličín (kovariáciu) a ako jednoznačný vzťah medzi prvkami dvoch množín (korešpondenciu),
- skúmať funkciu ako matematický objekt, analyzovať jej vlastnosti, využívať tieto vlastnosti pri riešení rovníc, nerovníc, a pri transformáciách a operáciách s funkciami,
- interpretovať, využívať a prepájať rôzne reprezentácie funkcie (graf, tabuľka, analytický predpis a slovný opis), prechádzať medzi nimi podľa kontextu, a voliť reprezentácie vhodné pre daný problém,
- rozpoznať funkčné závislosti a modelovať realistické situácie pomocou funkcií, **posudzovať vhodnosť a limity konkrétneho, resp. zostaveného modelu realistickej situácie.**

Cieľ F.2: Rozumieť pravdepodobnostným modelom a prijímať informované rozhodnutia v situáciách zahŕňajúcich náhodu alebo neistotu na základe pravdepodobnostných modelov.

Žiak vie/dokáže:

- modelovať situácie pomocou vhodného prístupu k pravdepodobnosti (klasický, geometrický, frekvenčný – založený na dátach, subjektívny – založený na informáciách, skúsenosti, úsudku), **podmienenej pravdepodobnosti** a posúdiť limity zvoleného modelu,
- **používať očakávanú hodnotu pri racionálnom rozhodovaní v situáciách zahŕňajúcich náhodu alebo neistotu,**
- **vysvetliť vzťah medzi teoretickou pravdepodobnosťou a experimentálnymi výsledkami a opakovanými digitálnymi simuláciami sledovať stabilizáciu relatívnych početností pri rastúcom počte pokusov a interpretovať jej vzťah k teoretickej pravdepodobnosti.**

Cieľ F.3: Organizovať a analyzovať dáta, využívať štatistické metódy na ich spracovanie, interpretáciu a adekvátnu vizualizáciu.
Žiak vie/dokáže:

- formulovať výskumné otázky, navrhovať adekvátne metódy zberu dát a identifikovať extrémy či anomálie,
- klasifikovať štatistické znaky na kvantitatívne (diskrétne a spojité) a kvalitatívne (nominálne a ordinálne) a podľa ich povahy voliť vhodné charakteristiky a vizualizácie aj s využitím digitálnych technológií,
- posúdiť reprezentatívnosť výberového súboru a vyvodiť štatistické závery o celku so zohľadnením miery neistoty a možného skreslenia dát,
- kriticky posudzovať štatistické dáta, vizualizácie a závery a identifikovať metodologické chyby, neadekvátne zobrazenia a dezinterpretácie informácií,
- **interpretovať štatistické dáta využitím vlastností teoretických rozdelení dát a vyhodnocovať pravdepodobnosť ich výskytu v kontexte realistickej situácie**.

Geometria a meranie

Cieľ G.1: Pracovať s rôznymi reprezentáciami geometrických útvarov, interpretovať ich význam a prepájať ich pri riešení problémov.

Žiak vie/dokáže:

- definovať geometrické útvary rôznymi spôsobmi (synteticky a analyticky) a posúdiť vhodnosť zvolenej definície podľa kontextu úlohy,
- prechádzať medzi náčrtom, konštrukciou, rovnicou rovinných útvarov a ich zobrazením v súradnicovej sústave,
- vizualizovať a modelovať geometrické objekty aj s využitím digitálnych nástrojov,
- využívať množiny bodov danej vlastnosti pri skúmaní útvarov a riešení konštrukčných úloh,
- využívať geometrické transformácie (symetria, posunutie**, otočenie, rovnoľahlosť**) pri skúmaní útvarov a riešení konštrukčných úloh,
- identifikovať invariantné vlastnosti geometrických útvarov pri ich transformáciách a manipuláciách,
- navrhnúť, zapísať a zdôvodniť postup riešenia konštrukčnej úlohy.

Cieľ G.2: Analyzovať priestorové situácie a vzťahy medzi geometrickými objektmi a vyjadrovať ich rôznymi spôsobmi.

Žiak vie/dokáže:

- využiť zobrazenie telesa vo voľnom rovnobežnom premietaní pri riešení úloh,

- modelovať realistické situácie synteticky (pomocou geometrických objektov) **a analyticky (pomocou súradnicových alebo vektorových metód),**
- určovať vzájomné polohy bodov, priamok a rovín synteticky (náčrt, rez) **a analyticky.**

Cieľ G.3: Určovať a interpretovať metrické vlastnosti geometrických objektov s využitím vhodných matematických nástrojov.

Žiak vie/dokáže:

- určovať vzdialenosti a odchýlky (veľkosti uhlov) v rôznych geometrických situáciách,
- riešiť metrické úlohy v rovine **a v priestore** trigonometrickými vzťahmi **a analytickými postupmi,**
- využívať vzťahy pre výpočet objemu a povrchu telies pri riešení realistických úloh.

Cieľ G.4: Zdôvodňovať geometrické tvrdenia a vytvárať matematické argumenty s využitím rôznych prístupov.

Žiak vie/dokáže:

- formulovať postup riešenia a logicky zdôvodniť jednotlivé kroky,
- rozlíšiť medzi empirickým overením (obrázkom, meraním) a dôkazom,
- **analyzovať správnosť geometrických tvrdení a identifikovať chyby v argumentácii,**
- **dokazovať geometrické tvrdenia strategickým výberom syntetického alebo analytického postupu.**

Základy formálnej matematiky

Cieľ Z.1: Využívať výroky, zaužívané matematické konvencie a presnú terminológiu ako univerzálny jazyk na opis situácií a pravidiel, porozumieť množinovému zápisu **a budovaniu formálnej modernej matematiky.**

Žiak vie/dokáže:

- rozlišovať v matematickom texte medzi zavedením pojmu (definíciou), tvrdením, ktoré treba dokázať (vetou) a konkrétnym príkladom,
- používať množinovú symboliku a logické spojky na jednoznačný zápis podmienok a prechádzať slovné zadanie do formálneho matematického zápisu.

Cieľ Z.2: Posudzovať platnosť tvrdení, úsudkov a využívať logiku pri tvorbe záverov.

Žiak vie/dokáže:

- rozpoznať chyby v matematickej argumentácii, vysvetliť, v čom spočíva ich nesprávnosť a navrhnúť korektný spôsob zdôvodnenia,
- určiť pravdivosť (pravdivostnú hodnotu) zložených výrokov a tvrdení s kvantifikátormi (existenčnými a všeobecnými) v rôznych realistických a **formalizovaných matematických** kontextoch,

- formulovať negácie tvrdení,
- vyvrátiť nepravdivé všeobecné tvrdenie cieleným nájdením (alebo konštrukciou) jedného korektného protipríkladu.

Cieľ Z.3: Analyzovať štruktúru formálnych dôkazov a konštruovať deduktívne argumenty.

Žiak vie/dokáže:

- rozlíšiť medzi empirickým overením hypotézy na konečnom počte príkladov a **exaktným matematickým dôkazom**,
- **identifikovať logickú štruktúru dôkazu (predpoklady, postupnosť deduktívnych krokov, záver) a odhaliť v nej prípadné logické chyby alebo kruhovú argumentáciu,**
- **zvoliť a aplikovať vhodnú stratégiu dokazovania (priamy dôkaz, nepriamy dôkaz, dôkaz sporom) pri overovaní matematických vzťahov a tvrdení.**

Obsahový štandard

Vzdelávací štandard predmetu matematika je rozdelený na štyri obsahové komponenty, každý komponent je rozpracovaný pre pojmy-vzťahy-postupy a matematické praktiky, ktoré určujú nielen mieru abstrakcie a množstvo zručností (odlíšenie základnej a pokročilej úrovne), ale aj prepojenie osvojených pojmov, vzťahov a postupov pri riešení realistických situácií, reprezentovaní a argumentovaní. Pre lepšiu čitateľnosť opätovne pripomíname význam jednotlivých položiek v každom zo subkomponentov:

Vysvetlenie štruktúry subkomponentu

Pojmy
Úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách. Pojmy osvojené na ZŠ podfarbené sivou.

Ovládanie pojmov znamená:
- žiak má vybudovanú korektnú predstavu o daných pojmoch,
- rozumie zadaniam úloh, v ktorých sa tieto pojmy vyskytujú,
- vie pojmy správne použiť pri formuláciách svojich odpovedí,
- len ak to praktika vyžaduje, vie pojmy vysvetliť alebo definovať – čomu vždy musí predchádzať porozumenie.

Skutočnosť, že sa od žiakov nevyžaduje aktívna znalosť definície, neznamená, že ju učiteľ nemá vo vyučovaní využívať.

Vzťahy
Matematické súvislosti, vzorce a tvrdenia, ktoré sa v kurikule využívajú, a ktorých spôsob používania a porozumenia je špecifikovaný v matematických praktikách.

Ovládanie vzťahov znamená:
- žiak ich vie správne a zmysluplne aplikovať pri riešení úloh, modelovaní a argumentácii,
- len ak to praktika vyžaduje, tak vie vysloviť, odvodniť či dokázať tvrdenia.

Matematické reprezentácie
Rôzne formy zobrazovania (vizualizácie) pojmov a vzťahov.

Matematická praktika zahŕňa:
- poznať uvedené reprezentácie a rozumieť významu ich použitia,
- vedieť v nich čítať – rozumieť im,
- vedieť ich zostaviť (niekedy aj/len s využitím digitálnych nástrojov),
- prechádzať medzi rôznymi reprezentáciami,
- vybrať vhodnú reprezentáciu v konkrétnom kontexte.

Matematické modelovanie
Matematizácia realistických problémov.

Matematická praktika zahŕňa:
- identifikáciu situácií, v ktorých je užitočný konkrétny matematický aparát,
- výber alebo zostavenie modelu s ohľadom na realistický kontext,
- posúdenie vhodnosti a obmedzení modelu,
- interpretáciu získaných výsledkov v kontexte pôvodnej situácie,
- využitie digitálnych nástrojov.

Matematická komunikácia a argumentácia
Používanie matematického jazyka, terminológie a symboliky na presné vyjadrenie myšlienok, zdôvodnenie postupov a posudzovanie tvrdení.

Matematická praktika zahŕňa:
- používanie matematickej terminológie a symboliky,
- formulovanie myšlienok, postupov a záverov,
- zdôvodňovanie a obhajobu tvrdení,
- kritické posudzovanie tvrdení a identifikáciu chýb,
- v niektorých kontextoch aj definovanie pojmov, odvodenie alebo dôkaz tvrdení,
- argumentáciu a **dôkazy**.

Postupy
Zoznam tých osvojených a automatizovaných postupov, algoritmov a metód riešenia úloh, ktorých neautomatizované používanie by predstavovalo prekážku pri porozumení a riešení zložitejších matematických problémov. Osvojeniu a automatizácii postupov má predchádzať ich porozumenie.

Ovládanie postupov znamená:
- bezchybné vykonávanie základných matematických algoritmov, výpočtov a štandardných postupov,
- zvládnutie rutinných úloh do takej miery, aby ich žiak vykonával plynule, efektívne a bez zbytočného kognitívneho preťaženia,
- schopnosť nielen mechanicky počítať, ale aj strategicky si zvoliť najvhodnejší a najjednoduchší postup pre konkrétny typ problému.

1. Čísla, výrazy a operácie s nimi

1.1 Množstvá, čísla a ich vlastnosti

Pojmy
(úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)

- deliteľnosť, zvyšok po delení, prvočíslo, zložené číslo, násobok, deliteľ, najmenší spoločný násobok, najväčší spoločný deliteľ
- n-ciferné číslo, ciferný súčet
- pozičná číselná sústava
- súdeliteľné, nesúdeliteľné čísla, prvočíselný rozklad
- kladné a záporné celé číslo; opačné čísla, absolútna hodnota
- desatinné číslo, desatinná čiarka, celá a desatinná časť desatinného čísla, zlomok, čitateľ, menovateľ, zlomková čiara, spoločný menovateľ, základný tvar zlomku, desatinný zlomok, zložený zlomok, percento (%), základ, počet percent, hodnota prislúchajúca počtu percent
- rozšírený tvar zlomku, prevrátený zlomok, promile
- desatinný rozvoj (konečný, nekonečný a periodický), perióda, periodické číslo
- racionálne číslo, iracionálne číslo, reálne číslo
- druhá a tretia mocnina a odmocnina, číslo π (pí)
- základ mocniny, exponent, mocnina (s prirodzeným, celočíselným a racionálnym exponentom), n-tá odmocnina
- zaokrúhľovanie, zaokrúhľovanie nahor a nadol, približne, presne
- zaokrúhlená hodnota, približná hodnota, platná číslica (v zápise približného čísla), (absolútna) chyba približného čísla
- úrok, (ročná) úroková miera, jednoduché a zložené úrokovanie, súčasná a budúca hodnota peňazí, DPH, úver, anuitná splátka, lízing, RPMN

Vzťahy
(úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)

- pravidlá pre počítanie s približnými číslami:
  - presnosť súčtu, alebo rozdielu určuje najmenej presný člen
  - počet platných číslic súčinu, alebo podielu, určuje člen s najmenším počtom platných číslic
- pravidlá pre počítanie s mocninami a odmocninami:
  - pre $a, b > 0,\ x, y \in \mathbb{R}$ platí:
    $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
    $(a^x)^y = a^{xy}$
    $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
    $(ab)^x = a^x b^x$
    $a^0 = 1$
  - pre $x, y \geq 0, m, n \in \mathbb{N}$ platí:
    $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$
    $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$
    $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$
  - pre $x \in \mathbb{R}$ platí: $\sqrt{x^2} = |x|$
- vzťahy medzi číselnými množinami:
  - $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
  - $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$
  - $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$
- každé zložené číslo n je deliteľné aspoň jedným prvočíslom p, pričom $p \leq \sqrt{n}$
- kritériá deliteľnosti číslami 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100
- **ak p je prvočíslo, tak $\sqrt{p}$ je iracionálne číslo**

Matematické reprezentácie

- číslicový a rozvinutý zápis čísla v pozičnej desiatkovej sústave
- reprezentácia prirodzeného čísla n zohľadňujúca jeho deliteľnosť číslom q v tvare $kq + r, 0 \leq r < q$
- desatinné číslo a zlomok ako reprezentácie racionálneho čísla a vzťahy medzi nimi

Matematické modelovanie

- nájdenie optimálneho riešenia úlohy s realistickým kontextom identifikovaním najmenšieho spoločného násobku, resp. najväčšieho spoločného deliteľa
- riešenie problémov využitím deliteľnosti vhodným prirodzeným číslom
- využitie vedeckého zápisu čísel na odhad výsledku aritmetických operácií s veľmi veľkými, resp. veľmi

Matematická komunikácia a argumentácia

- argumentácia založená na porovnaní rôznych možností splácania pôžičky, úveru a pod.
- vysvetlenie dôkazov tvrdení typu súčet dvoch párnych, resp. nepárnych čísel je párne číslo
- argumentácia súvisu medzi deliteľnosťou číslami a, b a deliteľnosti ich súčinom $a \cdot b$, v závislosti od nesúdeliteľnosti alebo súdeliteľnosti čísel a, b

	- desatinné číslo s nekonečnými desatinným rozvojom bez periódy ako reprezentácia iracionálneho čísla - rôzne ekvivalentné vyjadrenia daného čísla - priamka ako geometrický model množiny reálnych čísel - vizualizácia vzájomného vzťahu číselných množín ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$) pomocou Vennových diagramov	malými hodnotami v kontexte realistickej situácie a vplyv zaokrúhľovania na presnosť výsledku - voľba logicky správnej číselnej množiny ako definičného oboru pre premenné v modeli realistickej situácie - modelovanie a porovnávanie vývoja úročenej sumy pri jednoduchom a zloženom úrokovaní pomocou tabuľkového kalkulátora a skúmanie vplyvu priebežného zaokrúhľovania na konečný výsledok - modelovanie splácania úveru a lízingu využitím funkcií tabuľkového kalkulátora	- vysvetlenie tvrdenia, že každé prirodzené číslo väčšie ako 1 má jednoznačný prvočíselný rozklad - rozhodnutie, či je dané číslo racionálne alebo iracionálne, na základe jeho desatinného rozvoja, vrátane uvedomenia si obmedzení pri veľmi dlhých periódach - odôvodnenie pravidiel pre počítanie s mocninami s celočíselným **aj racionálnym exponentom** - nájdenie protipríkladu pre vyvrátenie platnosti tvrdení typu: $\forall\, a, b \geq 0, a \geq b$: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ - posúdenie dopadu chyby aritmetických operácií s nepresnými číslami v kontexte realistickej situácie - formulovanie tvrdenia o deliteľnosti v tvare implikácie, alebo ekvivalencie a **identifikácia nutnej a postačujúcej podmienky pre danú vlastnosť** - **dôkazy kritérií deliteľnosti** - **dôkaz iracionality odmocniny z prvočísla** - **dôkaz, že prvočísel je nekonečne veľa**
	Postupy - určenie najväčšieho spoločného deliteľa a najmenšieho spoločného násobku podľa definície a s využitím prvočíselného rozkladu - operácie s číslami vyjadrenými vedeckým zápisom - operácie s mocninami a odmocninami, odstránenie odmocniny z menovateľa zlomku (usmerňovanie zlomkov) v náročnosti nevyhnutnej pre zvládnutie ďalšieho obsahu - výpočet cien s DPH a bez DPH - výpočet ceny pred zľavou a po zľave		

1.2 Určovanie počtu prvkov konečných množín (Kombinatorika)

Pojmy
(úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)

- usporiadanie prvkov s opakovaním a bez opakovania
- faktoriál, kombinačné číslo
- **kombinácie, kombinácie s opakovaním, variácie, variácie s opakovaním, permutácie, permutácie s opakovaním**
- **Pascalov trojuholník**

Vzťahy
(úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)

- kombinatorické pravidlá súčtu a súčinu
- vzťah medzi počtom usporiadaných a neusporiadaných n-tíc
- $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n, n \in \mathbb{N}; 0! = 1$ (podľa definície)
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ pre $n, k \in \mathbb{N}_0; k \leq n$
- vlastnosti kombinačných čísel:
  - symetria $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ pre $n, k \in \mathbb{N}_0; k \leq n$
  - **Pascalovo pravidlo** $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ **pre** $n, k \in \mathbb{N}_0; 0 \leq k < n$
- **binomická veta:** $(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$, $x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$

Matematické reprezentácie

- stromový diagram
- karteziánsky graf
- lexikografické usporiadanie množiny výstupov – systematické vypisovanie všetkých možností podľa poradia
- grafická reprezentácia riešení úloh vedúcich k určeniu počtu spojení medzi dvojicami prvkov (pomocou úplného grafu)
- numerická reprezentácia (kombinačné číslo) a grafická reprezentácia (cesty po mriežke) – vizuálne znázornenie úloh na počet kombinácií bez opakovania
- grafická reprezentácia riešení úloh založených na párovaní prvkov z dvoch množín (pomocou bipartitného grafu)
- **priehradkový princíp ako reprezentácia úloh na kombinácie s opakovaním**
- **reprezentácia systému podmnožín pomocou postupností núl a jednotiek**

Matematické modelovanie

- analýza situácie a tvorba modelu (s ohľadom na poradie, opakovanie, rozlíšiteľnosť) aj bez použitia pojmov kombinácie, variácie a permutácie a interpretácia výsledkov v kontexte úlohy
- určenie počtu možností rozdelením problému na časti a použitím pravidla súčtu a súčinu s vhodným znázornením (so zohľadnením poradia a opakovania)
- vyhľadávanie duplicít, identifikácia chýbajúcich položiek v zoznamoch údajov aj využitím tabuľkového kalkulátora
- aplikácia kombinatorických postupov pri riešení realistických úloh (typu výber tímu, tvorba kódov, usporiadanie objektov) **a ich zovšeobecnenie**

Matematická komunikácia a argumentácia

- zdôvodnenie postupu určenia počtu možností podľa podmienok výberu a usporiadania
- overenie úplnosti výpisov (aj neúplných), odhalenie systému a chýb v postupoch
- vysvetlenie faktoriálu $n!$ ako počtu všetkých usporiadaní n rozlíšiteľných prvkov
- vysvetlenie významu kombinačného čísla $\binom{n}{k}$ ako počtu výberov k prvkov z n bez ohľadu na poradie
- vysvetlenie vzťahu medzi počtom usporiadaných a neusporiadaných k-tic vybraných z n rôznych prvkov
- **odvodenie vzťahov pre výpočet počtu variácií, variácií s opakovaním, kombinácií s opakovaním**
- zdôvodnenie vlastností kombinačných čísel (symetria, **Pascalovo pravidlo**) pomocou kombinatorických úvah
- **vysvetlenie prepojenia Pascalovho trojuholníka, kombinačných čísel a binomickej vety**
- **vysvetlenie rovnosti súčtu kombinačných čísel v riadku Pascalovho trojuholníku a počtu zodpovedajúcich podmnožín**

			- **uvedenie príkladu, keď rôzne úlohy môžu mať rovnaký kombinatorický model, a keď rovnaký model môže mať rôzne kontextové interpretácie**

Postupy

- tvorba systematického výpisu možností pre primerane veľké množiny prvkov, ktorý je riešením kombinatorických problémov charakterizovaných v časti *Pojmy*
- výpočet, úprava a zjednodušovanie číselných a algebraických výrazov obsahujúcich faktoriály a kombinačné čísla v náročnosti, ktorá nepresahuje aparát potrebný na určenie počtu prvkov v modelovaných situáciách
- určovanie hodnôt kombinačných čísel priamym výpočtom, **aj s využitím Pascalovho trojuholníka**
- **algebraický rozvoj dvojčlena, ktorého exponentom je prirodzené číslo s využitím binomickej vety**

1.3 Výrazy a ich ekvivalencia

Pojmy
(úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)

- výraz, hodnota číselného výrazu, koeficient, premenná, člen s premennou
- číselný výraz, algebraický výraz, výraz s jednou a s viacerými premennými
- mnohočlen, kvadratický výraz, racionálne lomený výraz, odmocninový (iracionálny) výraz, exponenciálny výraz, logaritmický výraz, goniometrický výraz
- výraz s absolútnou hodnotou, nulový bod
- definičný obor výrazu
- výraz s premennou v menovateli

Vzťahy
(úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)

- algebraické identity:
  - $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$
  - $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$
- logaritmické identity:
  - $y = \log_z x \Leftrightarrow z^y = x,\ x > 0, z \in (0;1) \cup (1;\infty)$
  - Pre $x, y > 0$ a základ $z \in (0;1) \cup (1;\infty)$ platí:
    $\log_z(x \cdot y) = \log_z x + \log_z y$
    $\log_z \frac{x}{y} = \log_z x - \log_z y$
  - Pre $x > 0, s \in \mathbb{R}, z \in (0;1) \cup (1;\infty)$ platí: $\log_z x^s = s \cdot \log_z x$
  - **Pre $x, y, z > 0$ a $x, y, z \neq 1$, $\log_y x = \frac{\log_z x}{\log_z y}$**
- goniometrické identity:
  - $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
  - $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$
  - $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$
  - $\boldsymbol{\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}$
  - $\boldsymbol{\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}$
    špeciálne $\boldsymbol{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$, $\boldsymbol{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$

Matematické reprezentácie	**Matematické modelovanie**	**Matematická komunikácia a argumentácia**

	- algebraická a geometrická reprezentácia algebraických výrazov (s možnosťou využitia digitálnych nástrojov) - $\|x - a\|$ ako vzdialenosť obrazov čísel x a a na číselnej osi	- zápis slovného opisu pomocou výrazov - interpretácia výrazov v realistickom kontexte - opis a kvantifikácia realistických situácií pomocou vzťahov medzi veličinami, aj využitím identít	- zdôvodnenie ekvivalencie výrazov - odôvodnenie platnosti vzťahov pre umocnenie dvojčlena na druhú - interpretácia významu jednotlivých členov alebo premenných v kontexte popisovanej realistickej situácie - identifikácia a oprava logickej alebo algebraickej chyby v predloženom postupe úpravy výrazu - vysvetlenie odvodenia logaritmických identít - **odôvodnenie platnosti logaritmických a goniometrických identít**
	Postupy - úprava výrazov (zjednodušovanie, rozširovanie, vrátane použitia neutrálneho prvku vzhľadom na násobenie/sčítanie) s použitím vlastností (komutatívnosť, asociatívnosť, distributívnosť) - určenie hodnoty výrazu (presne alebo odhadom) - určenie definičného oboru výrazu - odstránenie absolútnej hodnoty výrazu - úprava kvadratického výrazu na štvorec - úprava mnohočlena na súčin (vynímaním spoločného činiteľa pred zátvorku, rozkladom použitím identít vo *Vzťahoch* tejto tabuľky)		

1.4 Rovnice a nerovnice

Pojmy
(úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)

- neznáma, lineárna rovnica/nerovnica s jednou neznámou, pravá a ľavá strana rovnice/nerovnice, riešenie (koreň) rovnice/nerovnice.
- rovnica, nerovnica, sústava rovníc a nerovníc
- lineárny/kvadratický člen, koeficient pri lineárnom/kvadratickom člene
- diskriminant kvadratickej rovnice
- rovnica a nerovnica s absolútnou hodnotou, rovnica a nerovnica s neznámou v menovateli
- kvadratická, iracionálna, exponenciálna, logaritmická a goniometrická rovnica a nerovnica
- ekvivalentné a dôsledkové úpravy rovnice a nerovnice, množina koreňov rovnice a nerovnice
- parameter, lineárna a **kvadratická** rovnica s parametrom
- substitúcia

Vzťahy
(úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)

- vzťah medzi znamienkami súčinu/podielu dvoch výrazov a znamienkami jednotlivých činiteľov/delenca a deliteľa
- vzťah medzi počtom riešení rovnice $f(x) = 0$ v $\mathbb{R}$ a vlastnosťami funkcie f (t. j. zohľadnenie periódy pri goniometrických funkciách, prostosť exponenciálnych a logaritmických funkcií, vplyv absolútnej hodnoty na počet koreňov) – pozri komponent *Funkcie, závislosti a práca s údajmi*
- $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, kde $D = b^2 - 4ac$ je diskriminant kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$
- vzťah medzi hodnotou diskriminantu a počtom reálnych koreňov kvadratickej rovnice
- $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, kde x_1, x_2 sú korene kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$
- **Viètove vzťahy (pre kvadratickú rovnicu): $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}$, kde x_1, x_2 sú korene kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$**

Matematické reprezentácie

- reprezentácia množiny riešení rovnice/nerovnice sústavy dvoch rovníc/**nerovníc** (špeciálne lineárnych, resp. kombinácia lineárnej rovnice a rovnice, ktorú možno zapísať v tvare $y = f(x)$), slovným opisom, symbolickým zápisom, priesečníkom grafu funkcie s niektorou zo súradnicových osí, priesečníkom grafov dvoch funkcií, aj s využitím vhodných digitálnych nástrojov
- zápis množiny koreňov pomocou intervalov, vymenovaním prvkov alebo charakteristickou vlastnosťou
- reprezentácia riešení nerovnice $f(x) * 0$ pomocou grafu funkcie f, reprezentácia riešení nerovníc $f(x) * g(x)$ pomocou grafov funkcií f, g, kde * označuje niektorý zo znakov $\geq, \leq, >, <$, aj s využitím vhodných digitálnych nástrojov

Matematické modelovanie

- modelovanie realistických situácií pomocou rovníc a nerovníc s využitím algebraického zápisu, tabuľky a grafu s možnosťou využitia vhodného digitálneho nástroja
- riešenie kontextových úloh vedúcich k rovniciam a nerovniciam a interpretácia získaných riešení v jazyku pôvodného zadania, vrátane jednoduchých finančných rozhodnutí pri porovnaní ponúk, výpočte cieľovej sumy, rozpočtovom obmedzení alebo maximálnej splátke
- riešenie realistických úloh vedúcich k sústavám rovníc/**nerovníc** a interpretácia získaných riešení v jazyku pôvodného zadania

Matematická komunikácia a argumentácia

- overenie prípustnosti riešení vzhľadom na definičný obor a podmienky vyplývajúce z kontextu riešeného problému
- interpretácia významu symbolu v danom kontexte (premenná, neznáma, koeficient, parameter)
- diskutovanie a argumentovanie o tom, ktoré z koreňov rovnice, ktorá vznikla použitými úpravami, sú aj koreňmi pôvodnej rovnice
- diskusia o vplyve zmeny koeficientov lineárnej/kvadratickej rovnice na hodnotu a počet koreňov vhodnou vizualizáciou s možnosťou využitia digitálnych nástrojov
- diskusia o vplyve zmeny parametrov lineárnej/**kvadratickej** rovnice na hodnotu a počet koreňov vhodnou vizualizáciou s možnosťou využitia digitálnych nástrojov
- vysvetlenie zmeny znaku nerovnosti pri riešení nerovníc využitím vlastností prislúchajúcich funkcií

			(rast, klesanie), špeciálne vynásobenie obidvoch strán nerovnice záporným číslom - **argumentovanie, či použitá úprava zachová alebo môže zmeniť množinu riešení danej rovnice, alebo nerovnice** - **argumentácia o počte možných koreňov pre jednotlivé typy rovníc s využitím vlastností funkcií a ich grafickej reprezentácie** - **odvodenie vzťahu pre výpočet koreňov kvadratickej rovnice pomocou diskriminantu** - **odvodenie Viètových vzťahov pre kvadratickú rovnicu**
	Postupy: - vyjadrenie neznámej zo vzťahu v náročnosti nevyhnutnej pre zvládnutie ďalšieho obsahu - riešenie lineárnych rovníc a nerovníc - riešenie kvadratických rovníc a nerovníc - riešenie lineárnych **a kvadratických rovníc s parametrom** - riešenie sústav dvoch a **troch** lineárnych rovníc **a sústav lineárnej a kvadratickej rovnice** - riešenie základných iracionálnych (po úprave lineárna rovnica), goniometrických, exponenciálnych, logaritmických rovníc a nerovníc typu $af(x) * k, a, k \in \mathbb{R}$, kde * označuje niektorý zo znakov $=, \geq, \leq, >, <$, čítaním z grafu - riešenie rovníc a nerovníc s neznámou v menovateli (vedúce k lineárnej alebo kvadratickej rovnici/nerovnici) - riešenie lineárnej a kvadratickej rovnice a nerovnice s jednou, **alebo viacerými** absolútnymi hodnotami - **riešenie náročnejších iracionálnych, goniometrických, exponenciálnych a logaritmických rovníc a nerovníc (vedúcich k substitúcii alebo využitiu definícií a vlastností prislúchajúcich funkcií)** - **riešenie rovníc a nerovníc s neznámou v menovateli, rovníc a nerovníc s absolútnou hodnotou $\boldsymbol{f(|x|) * k, |f(x)| * k, k \in \mathbb{R}}$, kde * označuje niektorý zo znakov $=, \geq, \leq, >, <$** - riešenie rovníc a **nerovníc** zapísaných v tvare $f(x)g(x) * 0$, kde * označuje niektorý zo znakov $=, \geq, \leq, >, <$, ak vie riešiť $f(x) * 0, g(x) * 0$ - riešenie rovníc zapísaných v tvare $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, ak vie riešiť $f(x) = 0$, kde $f(x), g(x)$ sú lineárne alebo kvadratické výrazy - **riešenie nerovníc zapísaných v tvare $\frac{f(x)}{g(x)} * 0$, kde * označuje niektorý zo znakov $\geq, \leq, >, <$, ak vie riešiť $f(x) * 0, g(x) * 0$, kde $f(x), g(x)$ sú lineárne alebo kvadratické výrazy**		

2. Funkcie, závislosti a práca s údajmi

2.1 Modely zmien a rastu

Pojmy
(úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)

- lineárna funkcia
- kvadratická funkcia, nepriama úmernosť, **mocninová funkcia s celočíselným exponentom, lineárna lomená funkcia**
- exponenciálna a logaritmická funkcia
- smernica priamky
- **asymptota**
- parabola (ako graf kvadratickej funkcie), vrchol paraboly
- aritmetická a geometrická postupnosť, diferencia, kvocient, rekurentné vyjadrenie

Vzťahy
(úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)

- **súradnice vrcholu paraboly, ktorá je grafom kvadratickej funkcie $y = ax^2 + bx + c$ sú $V[-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}]$**
- n-tý člen aritmetickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s diferenciou d: $a_n = a_s + (n-s)d, n, s \in \mathbb{N}$, špeciálne $a_n = a_1 + (n-1)d, n \in \mathbb{N}$
- pre súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s diferenciou d platí: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
- n-tý člen geometrickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s kvocientom q $(q \neq 0)$: $a_n = a_s q^{n-s}, n, s \in \mathbb{N}$, špeciálne $a_n = a_1 q^{n-1}, n \in \mathbb{N}$
- **pre súčet prvých n členov geometrickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s kvocientom $q \neq 1$ platí: $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$**
- pozri aj algebraické a logaritmické identity v subkomponente *1.3 Výrazy a ich ekvivalencia*

Matematické reprezentácie

- priamka, parabola (ako graf kvadratickej funkcie), **grafy mocninových funkcií s kladným celočíselným exponentom**, hyperbola (ako graf nepriamej úmernosti, **ako graf lineárne lomenej funkcie**), **grafy mocninových funkcií so záporným celočíselným exponentom**
- exponenciálna a logaritmická krivka ako grafy exponenciálnej a logaritmickej funkcie
- rôzne tvary predpisu kvadratickej funkcie (všeobecný, vrcholový, súčinový tvar)
- vyjadrenie aritmetickej a geometrickej postupnosti rekurentne a predpisom pre n-tý člen

Matematické modelovanie

- sledovanie a porovnávanie rôznej rýchlosti zmien pri jednotlivých typoch rastu a poklesu (lineárnom, kvadratickom, exponenciálnom a logaritmickom) pomocou grafu a tabuľky, aj s využitím digitálnych technológií
- aplikácia aritmetickej a geometrickej postupnosti pri modelovaní zmien, ktoré neprebiehajú spojito, ale v diskrétnych krokoch, aj vo finančnom kontexte (sporenie, úročenie, inflácia, splácanie)
- využitie aritmetickej postupnosti na predikciu stavu v danom kroku (n-tý člen) a výpočet celkovej nakumulovanej hodnoty (súčet) v kontexte realistickej situácie
- využitie geometrickej postupnosti na predikciu stavu v danom kroku (n-tý člen) **a výpočet celkovej nakumulovanej hodnoty (súčet)** v kontexte realistickej situácie

Matematická komunikácia a argumentácia

- interpretácia koeficientov v predpise funkcií v kontexte ich monotónnosti, rýchlosti zmeny a tvaru grafu
- zdôvodnenie vplyvu koeficientu kvadratického člena na orientáciu paraboly a existenciu minima/maxima
- **odvodenie súradníc vrcholu paraboly z predpisu kvadratickej funkcie $y = ax^2 + bx + c$**
- **opísanie správania sa lineárne lomenej funkcie v okolí asymptot**
- interpretácia smernice lineárnej funkcie ako pomeru zmeny funkčnej hodnoty k zmene argumentu
- **interpretácia tangensu smerového uhla priamky v karteziánskej súradnicovej sústave ako jej smernice**
- **určenie a interpretácia priemernej zmeny funkčnej hodnoty na danom intervale pomocou smernice sečnice grafu funkcie**

		- **využitie kvadratickej funkcie na riešenie optimalizačných úloh spojených s hľadaním maxima alebo minima**	- vysvetlenie súvisu aritmetickej postupnosti a lineárneho rastu (poklesu) - vysvetlenie súvisu geometrickej postupnosti s kladným kvocientom a exponenciálneho rastu (poklesu) - odvodenie vzťahov pre n-tý člen a pre súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti - odvodenie vzťahov pre n-tý člen a **pre súčet prvých $\boldsymbol{n}$ členov** geometrickej postupnosti - zdôvodnenie, prečo je predpis $x = c, c \in \mathbb{R}$ vyjadrením priamky, ale nie grafom funkcie premennej x - zdôvodnenie, prečo je predpis $x = y^2$ vyjadrením paraboly v rovine, ale nie je grafom funkcie premennej x
	Postupy - zostavenie predpisu lineárnej a kvadratickej funkcie z dvoch/**troch bodov** (s dôrazom na kontextové úlohy) - určenie súradníc vrcholu konkrétnej kvadratickej funkcie $f(x) = ax^2 + bx + c$, kde $a = 1$ a $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R} - \{\mathbf{0}\}$ - **výpočet smernice sečnice grafu funkcie určenej dvoma hodnotami z tabuľky alebo dvoma bodmi grafu** - určenie diferencie aritmetickej postupnosti, kvocientu geometrickej postupnosti - rozhodnutie, či daná postupnosť je aritmetická alebo geometrická - použitie logaritmov pri riešení rovnice $a^x = b$ - **výpočet súčtu prvých $\boldsymbol{n}$ členov aritmetickej a geometrickej postupnosti**		

2.2 Funkcia ako matematický objekt, jej vlastnosti a transformácie

Pojmy
(úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)

- súradnicové osi, súradnice bodu, graf
- premenná (veličina), nezávislá a závislá premenná
- funkcia, argument, funkčná hodnota, definičný obor, obor hodnôt
- postupnosť, člen postupnosti
- postupnosť ako špeciálny prípad funkcie
- vlastnosti funkcií:
  - monotónnosť (rastúca, klesajúca, neklesajúca, nerastúca)
  - ohraničenosť (zdola, zhora, zdola aj zhora), maximum a minimum (globálne, lokálne)
  - párna, nepárna funkcia
  - prostá funkcia
- inverzná funkcia
- **zložená funkcia**

Vzťahy
(úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)

- rastúca/klesajúca funkcia je prostá
- graf inverznej funkcie je osovo súmerný s grafom pôvodnej funkcie podľa priamky $y = x$
- graf párnej funkcie je súmerný podľa osi $x = 0$, graf nepárnej funkcie je stredovo súmerný podľa bodu $[0,0]$
- $D(f) = H(f^{-1}), D(f^{-1}) = H(f)$
- k prostej funkcii existuje inverzná funkcia

Matematické reprezentácie

- funkčná závislosť: slovný opis, tabuľka, predpis, graf
- inverzná funkcia: slovný opis, tabuľka, graf, **predpis**
- tabuľková a grafická reprezentácia funkcií v tvare: $f(x) + c, f(x - c), c \cdot f(x), f(c \cdot x), -f(x), |f(x)|$, kde graf funkcie f je známy
- **zložená funkcia: tabuľka, predpis**

Matematické modelovanie

- výber modelu podľa charakteru diskrétnej/spojitej zmeny a určenie definičného oboru funkcie vzhľadom na limity daného kontextu
- prepojenie vlastností funkcie s priebehom reálneho deja
- interpretácia závislej a nezávislej premennej v kontexte realistickej situácie
- využitie inverznej funkcie v kontexte realistickej situácie na zistenie pôvodného stavu (vstupu)
- **určovanie hodnoty zloženej funkcie a interpretácia zloženej funkcie ako modelu skladania nadväzujúcich závislostí (typu teplota závislá od výšky závislej od času)**

Matematická komunikácia a argumentácia

- interpretácia funkcie ako jednoznačného priradenia a nástroja pre popísanie vzájomnej zmeny dvoch premenných (kovariácie)
- zdôvodnenie, či konkrétne číslo patrí do definičného oboru a/alebo oboru hodnôt
- argumentácia o definičnom obore a vlastnostiach funkcie z jej grafu (obor hodnôt, priesečníky, monotónnosť, prostá funkcia, ohraničenosť, minimum, maximum, párnosť, nepárnosť)
- formulácia protipríkladov nepravdivých tvrdení o vzťahoch medzi vlastnosťami funkcií
- **formulovanie definícií vlastností funkcií (monotónnosť, ohraničenosť, párna, nepárna, prostá funkcia)**
- **argumentácia o vlastnostiach funkcie na základe ich definície**

Postupy

- určovanie vlastností, definičného oboru a oboru hodnôt funkcie z grafu funkcie f

- náčrt grafu základných elementárnych funkcií (lineárna, kvadratická, mocninová, exponenciálna, logaritmická, nepriama úmernosť, **lineárne lomená funkcia,** goniometrické funkcie)
- načrtnutie grafu**, resp. zostavenie predpisu** funkcie**,** ktorá má dané vlastnosti (definičný obor, obor hodnôt, intervaly rastu a klesania, ohraničenosť, extrémy, párnosť, nepárnosť)
- náčrt zmien grafu funkcie $f(x)$: $f(x)+c$, $f(x-c)$, $c\cdot f(x)$, $f(c\cdot x)$, $-f(x)$, $|f(x)|$, kde graf funkcie $f(x)$ je známy, **alebo kombinácie týchto zmien**
- náčrt grafu inverznej funkcie k danej funkcii s využitím osovej súmernosti
- tvorba grafu funkcie s využitím digitálnych nástrojov
- určenie definičného oboru (pričom riešená rovnica alebo nerovnica nepresahuje štandard určený v subkomponente 1.4) vlastností funkcie z jej predpisu (prostá funkcia, monotónnosť, párnosť, nepárnosť)

2.3 Periodické deje a cyklickosť

Pojmy
(úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)

- veľkosť uhla v stupňoch
- periodická funkcia, perióda, amplitúda
- goniometrické funkcie (sínus, kosínus**, tangens**)
- orientovaný uhol, jednotková kružnica, oblúková miera, radián

Vzťahy
(úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)

- $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$
- $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$
- $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$
- $\boldsymbol{\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$ **(podľa definície)**
- $\boldsymbol{\tan(-\alpha)=-\tan\alpha}$
- $\boldsymbol{\tan(\alpha+\pi)=\tan\alpha}$
- pozri aj goniometrické vzťahy v subkomponenta *1.3 Výrazy a ich ekvivalencia*

Matematické reprezentácie

- veľkosť uhla v stupňovej a v oblúkovej miere
- jednotková kružnica
- sínusoida, kosínusoida, **tangentoida** ako grafy goniometrických funkcií

Matematické modelovanie

- rozpoznávanie periodicity v realistických situáciách a jej modelovanie pomocou grafu a tabuľky, aj s využitím digitálnych technológií
- identifikácia amplitúdy, periódy na základe koeficientov v predpise funkcie $y=a\cdot f(b(x-c))+d$, kde f je sínus, kosínus, **tangens**, v kontexte periodických dejov
- **modelovanie dejov/situácií funkciou s predpisom v tvare**

Matematická komunikácia a argumentácia

- vysvetlenie prepojenia medzi pomermi strán pravouhlého trojuholníka a goniometrickými funkciami zavedenými pomocou jednotkovej kružnice
- zdôvodnenie periodicity a symetrie grafov goniometrických funkcií na základe pohybu bodu po jednotkovej kružnici
- vysvetlenie rozdielov medzi periodickými a neperiodickými modelmi

		$\boldsymbol{y = a \cdot \sin(b(x-c)) + d}$ $\boldsymbol{y = a \cdot \cos(b(x-c)) + d}$	
	Postupy - určenie vlastností funkcie z grafu (definičný obor, obor hodnôt, priesečníky, monotónnosť, periodicita) - prevod veľkosti uhla medzi stupňovou a oblúkovou mierou - vyjadrenie $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\boldsymbol{\tan\alpha}$ pre $\alpha \in \mathbb{R}$ na jednotkovej kružnici pomocou sínusu, kosínusu alebo **tangensu** vhodného ostrého uhla		

2.4 Pravdepodobnosť	**Pojmy** **(úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)** - náhodná udalosť (náhodný jav), istá, možná, nemožná udalosť - pravdepodobnosť - náhodný pokus, výsledok náhodného pokusu, relatívna početnosť javu - doplnkový jav, nezlučiteľné javy, nezávislé javy - experimentálna pravdepodobnosť, teoretická pravdepodobnosť, Laplaceova (klasická) definícia pravdepodobnosti - **geometrická pravdepodobnosť, podmienená pravdepodobnosť, očakávaná hodnota**	**Vzťahy** **(úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)** - vlastnosti pravdepodobnosti: ● pre pravdepodobnosť P javu A platí $0 \leq P(A) \leq 1$ ● $P(A) + P(A') = 1$, kde A' je doplnkový jav k javu A ● pravdepodobnosť istého javu je 1 ● pravdepodobnosť nemožného javu je 0 ● nech $A \subseteq B$, potom $P(A) \leq P(B)$ - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, kde A, B sú nezlučiteľné náhodné javy - $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, ak A, B sú nezávislé javy - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ - pri väčšom počte pokusov sa experimentálna pravdepodobnosť približuje teoretickej - **Bernoulliho schéma (jav A s pravdepodobnosťou p nastane pri n opakovaniach náhodného pokusu práve k-krát): $P_k^n = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$** - **očakávaná hodnota náhodnej premennej X s možnými výstupmi $x_1, \ldots, x_n$, ktorých zodpovedajúce pravdepodobnosti sú $p_1, \ldots, p_n$: $E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$**	
	Matematické reprezentácie - reprezentácia pravdepodobnosti (vrátane **podmienenej**) pomocou tabuľky, stromového diagramu a množinového diagramu - **reprezentácia riešenia úloh z pravdepodobnosti pomocou plochy alebo dĺžky**	**Matematické modelovanie** - identifikácia realistických situácií zahŕňajúcich náhodu alebo neistotu, v ktorých je vhodné použiť pravdepodobnostný model - výber a použitie vhodného prístupu k pravdepodobnosti (klasický, frekvenčný, **subjektívny, geometrický**) podľa povahy problému a dostupných informácií	**Matematická komunikácia a argumentácia** - uvedenie príkladov náhodných javov a pokusov zo života - posúdenie správnosti využitia pravdepodobnosti v kontexte realistickej situácie - argumentovanie pomocou pravdepodobnosti pri rozhodovaní, odhade rizika alebo hodnotení tvrdení v médiách

		- modelovanie náhodných situácií využitím pravidiel pre sčítanie a násobenie pravdepodobností - využitie pravdepodobnosti opačného javu na zefektívnenie riešenia zložitejších modelov - simulácia náhodných javov pomocou digitálnych technológií na experimentálne odhadovanie pravdepodobnosti - porovnanie hodnôt experimentálnej a teoretickej pravdepodobnosti v realistickej situácii - **zmena hodnoty pravdepodobnosti na základe novej informácie s využitím podmienenej pravdepodobnosti** - **modelovanie rozhodovania v realistických situáciách (aj s finančným kontextom) s náhodným výsledkom pomocou očakávanej hodnoty**	- vysvetlenie vzťahov pre doplnkovú pravdepodobnosť a pre súčet pravdepodobností navzájom sa vylučujúcich javov na základe relatívnej početnosti - **argumentovanie, prečo v spojitých modeloch pravdepodobnosti (geometrická pravdepodobnosť) jav s pravdepodobnosťou 0 neznamená automaticky nemožný jav** - **rozhodnutie o** ○ **závislosti javov A, B, ak sú známe $P(A)$, $P(B)$ a $P(A \cap B)$** ○ **správnosti použitia rovnosti $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ na základe rozhodnutia o nezávislosti javov** ○ **správnosti použitia rovnosti $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ na základe rozhodnutia o nezlučiteľnosti javov** - **vysvetlenie vlastnosti pravdepodobnosti pomocou množinových diagramov** - **vysvetlenie rozdielu medzi experimentálnou a teoretickou pravdepodobnosťou a interpretácia očakávanej hodnoty**
	Postupy - určenie pravdepodobnosti ako pomeru počtu všetkých priaznivých a počtu všetkých možností - nájdenie pravdepodobnosti doplnkovej udalosti (javu) - určenie pravdepodobnosti súčasného výskytu nezávislých javov - určenie pravdepodobnosti zjednotenia nezlučiteľných javov - **aplikácia Beronoulliho schémy**		

2.5. Štatistika

Pojmy
(úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)

- údaj, hodnota, najmenšia (minimálna) a najväčšia (maximálna) hodnota, frekvenčná tabuľka/graf
- štatistický súbor, štatistický znak (kvantitatívny: diskrétny, spojitý a kvalitatívny: nominálny, ordinálny)
- absolútna, relatívna a kumulatívna početnosť, intervalové triedenie
- odľahlá (extrémna) hodnota
- charakteristiky polohy: medián, modus, percentil, kvartily, aritmetický priemer, vážený priemer, **geometrický priemer**
- **charakteristiky variability: variačné rozpätie, rozptyl, smerodajná odchýlka, medzikvartilové rozpätie**
- **korelácia ako miera štatistickej závislosti, korelačný koeficient, príčinná súvislosť (kauzalita)**
- základný súbor, výberový súbor, náhodný výber
- rozdelenie relatívnej početnosti, normálne rozdelenie**, binomické rozdelenie**

Vzťahy
(úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)

- vážený priemer čísel $x_1, \dots, x_n$ so zodpovedajúcou početnosťou jednotlivých čísel k_1 $(početnosť\ x_1), \dots, k_n$ $(početnosť\ x_n)$: $\bar{x} = \frac{k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n}{k_1+k_2+\cdots+k_n}$
- **geometrický priemer kladných čísel $x_1, \dots, x_n$: $\bar{x}_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$**
- **rozptyl čísel $x_1, \dots, x_n$, ktorých aritmetický priemer je $\bar{x}$:**
  $\sigma^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$
- **smerodajná odchýlka čísel $x_1, \dots, x_n$, ktorých aritmetický priemer je $\bar{x}$:**
  $\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}}$

Matematické reprezentácie

- bodový graf na číselnej osi na zobrazenie rozdelenia diskrétnych údajov
- stonkový a listový diagram vhodný na rýchlu vizuálnu kontrolu rozdelenia a identifikáciu odľahlých hodnôt
- tabuľka početností ako prehľadná reprezentácia dát a ako základ pre tvorbu grafov a výpočet charakteristík polohy a variability
- stĺpcový diagram a histogram na zobrazenie rozdelenia dát s využitím digitálnych technológií
- infografika ako vizuálne prepojenie dát s grafickými prvkami a symbolmi
- **bodový graf na zobrazenie trendu a korelačnej závislosti medzi dvoma znakmi s využitím digitálnych technológií**

Matematické modelovanie

- identifikácia problémov riešiteľných štatistikou
- návrh a realizácia štatistického prieskumu: formulácia otázok, zber, spracovanie a analýza dát a interpretácia hodnôt jednotlivých štatistických charakteristík
- usporiadanie a prevod surových dát do tabuliek početností, aj s intervalovým triedením
- výber vhodných štatistických charakteristík (**vrátane rôznych typov priemeru** a iných stredných hodnôt) podľa typu dát, rozdelenia, kontextu a odľahlých hodnôt a cieľa analýzy
- interpretácia údajov z tabuliek, diagramov a grafov opisujúcich rozdelenie početností alebo pravdepodobností v kontexte realistickej situácie
- identifikácia odľahlých hodnôt, chýb a nezrovnalostí v dátach a rozhodnutie o ich ponechaní, oprave alebo vylúčení podľa kontextu a cieľa analýzy

Matematická komunikácia a argumentácia

- interpretácia informácií z rôznych reprezentácií so zameraním na trendy, extrémy a polohu a variabilitu dát v kontexte realistickej situácie s využitím digitálnych technológií
- vysvetlenie vzťahu medzi priemerom, mediánom a rozdelením údajov (symetria, asymetria)
- argumentácia potreby využívania **rôznych typov priemeru** a iných stredných hodnôt
- rozhodnutie na základe tvaru histogramu, či môže ísť o normálne rozdelenie
- zdôvodnenie vhodnosti/nevhodnosti výberu štatistickej charakteristiky polohy aj v kontexte vplyvu odľahlých hodnôt na jednotlivé charakteristiky
- argumentácia, prečo je zvolený graf informatívny alebo zavádzajúci
- kritické čítanie grafov a infografík (aj s finančným kontextom: vývoj cien, inflácia, mzdy, úrokové miery alebo zadlženosť) s cieľom zistiť informácie a odhaliť možné manipulácie

		- využitie normálneho **a binomického** rozdelenia na modelovanie náhodných javov a riešenie praktických problémov - **odhad podielu hodnôt nachádzajúcich sa v zadanom okolí priemeru alebo mimo neho na základe priemeru a smerodajnej odchýlky**	- posúdenie spoľahlivosti tvrdení podľa veľkosti a náhodnosti výberu, spôsobu zberu dát a použitej metodiky - obhajoba záverov s uvedením predpokladov, obmedzení a možných zdrojov chýb - diskusia o zodpovednom používaní štatistiky v médiách, výskume a technológiách - argumentovanie, prečo môže byť výber nereprezentatívny alebo skreslený - formulácia protipríkladov nepravdivých tvrdení o vzťahoch medzi rôznymi strednými hodnotami súboru - vysvetlenie pojmov **korelácia,** normálne rozdelenie, **binomické rozdelenie** na konkrétnych príkladoch - **rozlišovanie medzi koreláciou a kauzalitou pri hodnotení vzťahu veličín** - **uvádzanie príkladov náhodných dejov, ktoré je možné modelovať normálnym rozdelením a dejov, ktoré takto modelovať možné nie je**
	Postupy - intervalové triedenie dát - určenie aritmetického priemeru, váženého priemeru, **geometrického priemeru,** modusu, mediánu, percentilu a kvartilu, aj s využitím funkcií tabuľkového kalkulátora - manuálna konštrukcia jednoduchých reprezentácií (bodový graf, stonkový a listový diagram) pre malé dátové súbory - **určenie rozptylu, smerodajnej odchýlky daného súboru s využitím funkcií tabuľkového kalkulátora**		

3. Geometria a meranie

3.1 Planimetria

Pojmy
(úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)

- rovnobežné a rôznobežné priamky, uhol, ramená uhla, vrchol uhla; priamy, pravý, ostrý, tupý, uhol väčší ako priamy; os uhla; vrcholový, susedný, striedavý a súhlasný uhol, vnútorný a vonkajší uhol mnohouholníka
- trojuholník (vrcholy, strany), pravouhlý, ostrouhlý a tupouhlý trojuholník; rovnostranný, rovnoramenný, rôznostranný trojuholník; základňa a ramená rovnoramenného trojuholníka, odvesny a prepona pravouhlého trojuholníka, významné prvky trojuholníka (výška, päta výšky, ťažnica, ťažisko, priesečník výšok, trojuholníková nerovnosť
- štvoruholník, rovnobežník, pravouholník (štvorec, obdĺžnik), kosoštvorec, kosodĺžnik, lichobežník (pravouhlý, rovnoramenný, všeobecný), základňa, rameno, výška lichobežníka; mnohouholník; pravidelný šesťuholník, pravidelný osemuholník
- os úsečky, os uhla; Tálesova kružnica
- kružnica a kruh (stred, polomer, priemer), kružnicový oblúk, dotyčnica
- bod, priamka, polpriamka, rovina, polrovina
- **konvexný n-uholník**
- polkružnica, kruhový výsek, kruhový odsek, medzikružie, tetiva, sečnica, nesečnica,
- stredový a obvodový uhol
- množina bodov s danou vlastnosťou
- vzdialenosť bodu od priamky
- osová a stredová súmernosť, stred súmernosti, os súmernosti, vzor a obraz
- osovo a stredovo súmerné útvary; zhodné a podobné trojuholníky, pomer/koeficient podobnosti
- zhodné zobrazenia, posunutie**, otočenie**
- **podobné zobrazenie, rovnoľahlosť**

Vzťahy
(úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)

- osi vnútorných uhlov trojuholníka sa pretínajú v jednom bode (stred vpísanej kružnice)
- osi strán trojuholníka sa pretínajú v jednom bode (stred opísanej kružnice)
- ťažnice sa pretínajú v jednom bode (ťažisko)
- výšky trojuholníka sa pretínajú v jednom bode (ortocentrum)
- veľkosť obvodového uhla je polovicou veľkosti stredového uhla prislúchajúceho k tomu istému kružnicovému oblúku
- Pytagorova veta
- **Euklidove vety:**
  V pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole C sú dané strany a, b, c, bod P, ktorý je pätou výšky v na stranu AB a úseky $c_a = |PB|$, $c_b = |AP|$, kde $c = c_a + c_b$. Potom platí
  $v^2 = c_a \cdot c_a$ (Euklidova veta o výške)
  $a^2 = c \cdot c_a$ (Euklidova veta o odvesne)
  $b^2 = c \cdot c_b$ (Euklidova veta o odvesne)
- **súčet veľkostí vnútorných uhlov konvexného n-uholníka je $(n-2) \cdot 180°$**
- **súčet veľkostí vonkajších uhlov konvexného n-uholníka je $360°$**

Matematické reprezentácie

- grafické znázornenie geometrických útvarov
- znázornenie vzoru a obrazu pri zhodnom a **podobnom** zobrazení
- geometrický opis a načrtnutie/narysovanie množiny bodov s danou vlastnosťou, typu
  - body, ktorých vzdialenosť od daného bodu je rovná, menšia (väčšia) ako dané kladné číslo

Matematické modelovanie

- prevádzanie realistických situácií do planimetrických modelov
- použitie množín bodov s danou vlastnosťou pri riešení konštrukčných úloh a úloh s realistickým kontextom
- konštrukcia trojuholníka pomocou množín bodov s danou vlastnosťou (typu strana, uhol, výška; strana,

Matematická komunikácia a argumentácia

- vysvetlenie postupu konštrukcie krok za krokom slovne a matematickou symbolikou (náčrt, rozbor, postup konštrukcie, konštrukcia, záver, diskusia a skúška)
- vysvetlenie vzťahov pre výpočet obsahu rovinných útvarov

	○ body, ktorých vzdialenosť od danej priamky je rovná, menšia (väčšia) ako dané kladné číslo ○ body, ktorých vzdialenosť od jedného bodu je väčšia ako od druhého bodu ○ body, ktorých vzdialenosť od jednej danej priamky je väčšia ako od druhej danej priamky ○ body, ktoré sú rovnako vzdialené od dvoch rovnobežiek ○ body, ktoré sú rovnako vzdialené od dvoch rôznobežiek ○ **body, z ktorých vidieť danú úsečku pod daným uhlom, špeciálne pod pravým uhlom**	uhol, ťažnica) aj s možnosťou využitia vhodných digitálnych nástrojov - aplikovanie geometrických zobrazení (osová a stredová súmernosť, posunutie**, otočenie**) aj v praktických situáciách - využívanie mierky a **rovnoľahlosti** aj pri riešení realistických úloh - **konštrukcie využitím zhodných a podobných zobrazení** - **konštrukcia spoločných dotyčníc dvoch kružníc**	- posudzovanie správnosti geometrického argumentu a identifikovanie chybného alebo neodôvodneného kroku - **odvodenie vzťahu pre súčet vnútorných uhlov konvexného n-uholníka jeho rozdelením na trojuholníky** - **vysvetlenie myšlienky približného výpočtu obsahu/obvodu kruhu využitím vpísaných a opísaných n-uholníkov** - **vysvetlenie odvodenia Euklidových viet** - **dôkaz vzťahu medzi veľkosťami stredového a obvodového uhla** - **dôkaz:** ○ **osi vnútorných uhlov trojuholníka sa pretínajú v jednom bode** ○ **osí strán trojuholníka sa pretínajú v jednom bode** ○ **ťažnice sa pretínajú v jednom bode** ○ **výšky v trojuholníku sa pretínajú v jednom bode** - **vysvetlenie použitia Pytagorovej a Euklidových viet pri konštrukcii úsečky, ktorej dĺžka je iracionálne číslo** - **zdôvodnenie zhodnosti alebo podobnosti dvoch trojuholníkov na základe príslušných kritérií a využitie zhodnosti alebo podobnosti pri argumentácii o vlastnostiach geometrických útvarov**
	Postupy - konštrukcia dotyčnice ku kružnici z daného vonkajšieho bodu kružnice - zobrazenie útvaru v danom zhodnom **a podobnom** zobrazení - určenie zhodnosti alebo **podobnosti** trojuholníkov z daných údajov pomocou príslušných kritérií - **určenie koeficientu podobnosti, rovnoľahlosti** - určenie veľkosti stredového alebo obvodového uhla pomocou ich vzájomného vzťahy		

3.2 Trigonometria

Pojmy
(úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)

- sínus, kosínus, tangens

Vzťahy
(úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)

- goniometrické funkcie v pravouhlom trojuholníku: V pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole C, uhlami $|\sphericalangle BAC| = \alpha,\ |\sphericalangle ABC| = \beta$ platí: $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{a}{c}, \cos\alpha = \sin\beta = \frac{b}{c}$
- obsah trojuholníka ABC, v ktorom strany s dĺžkami a, b zvierajú uhol γ, je $S(ABC) = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma$
- sínusová veta (rozšírená sínusová veta): V trojuholníku ABC platí $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, kde R je polomer kružnice opísanej trojuholníku ABC
- kosínusová veta: V trojuholníku ABC platia rovnosti:
  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
  $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$
  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Matematické reprezentácie

- slovný opis, náčrt trojuholníka s vyznačenými údajmi
- grafická a symbolická reprezentácia vzťahov medzi stranami, uhlami a polomerom kružnice opísanej trojuholníku

Matematické modelovanie

- modelovanie realistických situácií pomocou trigonometrie
- aplikácia goniometrie v meraní vzdialeností neprístupných miest
- interpretácia vypočítanej dĺžky alebo veľkosti uhla v kontexte realistickej situácie

Matematická komunikácia a argumentácia

- **vysvetlenie výpočtu obsahu trojuholníka využitím dĺžok dvoch strán a sínusu uhla, ktorý zvierajú**
- **odvodenie sínusovej a kosínusovej vety a posúdenie ich využitia pri riešení problémov v praxi**

Postupy

- (približné) určenie obvodu a obsahu narysovaných trojuholníkov, n-uholníkov, kruhov a ich častí
- určenie neznámej dĺžky strany alebo veľkosti uhla v pravouhlom trojuholníku pomocou sínusu, kosínusu alebo tangensu
- výpočet obsahu trojuholníka z dĺžok dvoch strán a veľkosti uhla, ktorý zvierajú

3.3 Stereometria

Pojmy
(úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)

- kocka, kváder, hranol, ihlan, vrchol, hrana, stena, výška telesa, stenová a telesová uhlopriečka
- valec, kužeľ, guľa (stred, polomer, priemer), podstava, plášť, sieť telesa
- pohľad spredu, zhora a zboku
- teleso (jednoduché a zložené), hranol (kolmý, pravidelný, n-boký), ihlan (pravidelný, n-boký)
- **guľová plocha, kužeľová plocha, kužeľosečka**
- nárys, pôdorys, bokorys
- (voľné) rovnobežné premietanie
- mimobežné priamky
- priesečnica dvoch rovín, rez telesa rovinou
- odchýlka dvoch priamok, **priamky a roviny, dvoch rovín**
- **vzdialenosť bodu od priamky a od roviny**

Vzťahy
(úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)

- zachovanie deliaceho pomeru a rovnobežnosti vo voľnom rovnobežnom premietaní
- vzťahy pre výpočet objemu a povrchu telies: Nech V je objem, S povrch, Q obsah plášťa, S_p obsah podstavy, v výška telesa. Potom platí:
  - hranol: $V = S_p v,\ \ S = 2S_p + Q$
  - ihlan: $V = \frac{1}{3} S_p v,\ \ S = S_p + Q$
  - valec: $V = \pi r^2 v,\ S = 2\,\pi r^2 + 2\pi r v$
  - kužeľ (rotačný): $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v,\ S = \pi r^2 + \pi r s$ (kde s je dĺžka strany kužeľa, $s^2 = r^2 + v^2$)
  - guľa: $V = \frac{4}{3}\pi r^3,\ S = 4\pi r^2$

Matematické reprezentácie

- zobrazenie telesa vo voľnom rovnobežnom premietaní, jeho nárys, pôdorys, bokorys a siete
- **predstava kužeľosečky ako rezu kužeľovej plochy rovinou**
- grafická reprezentácia vzdialenosti bodu od priamky a **roviny** pomocou kolmej úsečky

Matematické modelovanie

- transformovanie realistických situácií do priestorových geometrických modelov a ich zobrazovanie vo voľnom rovnobežnom premietaní aj s využitím digitálnych technológií
- využívanie objemu a povrchu telies pri riešení realistických úloh
- rozklad zložených priestorových objektov na jednoduchšie telesá a ich skladanie pri riešení realistických problémov
- **modelovanie priestorovej situácie pomocou rezov telies a prienikov rovín**

Matematická komunikácia a argumentácia

- zdôvodnenie, či daná sieť zodpovedá danému telesu
- zdôvodnenie konštrukcie rovinného rezu kocky, **ihlana**
- zovšeobecnenie princípu výpočtu objemu a povrchu telies (podstava, výška, plášť)
- **vysvetlenie klasifikácie vzájomnej polohy bodov, dvoch priamok, priamky a roviny , dvoch a troch rovín v priestore**
- **odvodenie vzťahu pre výpočet objemu valca, kužeľa a gule pomocou Cavalieriho princípu**
- **vysvetlenie myšlienky pre odvodenie vzťahu na výpočet povrchu gule**

Postupy

- zostrojenie obrazu telesa vo voľnom rovnobežnom premietaní
- zostrojenie rezu kocky, **ihlana** rovinou určenou tromi bodmi ležiacimi v rovinách stien, z ktorých aspoň dva ležia v tej istej stene daného telesa (náčrtom, rysovaním alebo pomocou digitálnych nástrojov)
- **určenie vzájomnej polohy dvoch priamok, priamky a roviny, dvoch rovín v priestore**
- **určenie priesečnice dvoch rovín a jej využitie pri konštrukcii rezu telesa**

3.4 Analytická geometria

Pojmy
(úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)

- orientovaná úsečka, súradnice bodu, vektor, opačný vektor, smerový a normálový vektor
- pravouhlý systém súradníc, sústava súradníc v rovine **a priestore**
- skalárny súčin vektorov, odchýlka (uhol) dvoch vektorov
- súradnice bodu a vektora na priamke, súradnice bodu a vektora v rovine **a v priestore**
- rovnobežné, rôznobežné, kolmé priamky**, roviny**
- **smerový uhol priamky**
- kružnica

Vzťahy
(úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)

- veľkosť vektora $\vec{u}(u_1, u_2)$ v rovine je $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$
- vzdialenosť dvoch bodov ako dĺžka úsečky
- skalárny súčin vektorov $\vec{u}(u_1, u_2)$ a $\vec{v}(v_1, v_2)$ v rovine:
  - $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$
  - $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \varphi$ ak poznáme veľkosť uhla vektorov φ
- pre veľkosť uhla dvoch nenulových vektorov $\vec{u}(u_1, u_2)$ a $\vec{v}(v_1, v_2)$ v rovine $\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$
- pre smerový vektor $\vec{u}$ a normálový vektor $\vec{n}$ priamky v rovine platí $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$
- vzťahy medzi smerovými/normálovými vektormi rovnobežných priamok/rovín
- pre súradnice stredu $S[x_S, y_S]$ úsečky AB, kde $A[x_A, y_A]$, $B[x_B, y_B]$, platí $x_S = x_A + \frac{1}{2}(x_B - x_A) = \frac{x_A + x_B}{2}$, $y_S = y_A + \frac{1}{2}(y_B - y_A) = \frac{y_A + y_B}{2}$
- **vzdialenosť bodu $B[x_B, y_B]$ od priamky p: $ax + by + c = 0$ je $|B; p| = \frac{|ax_B + by_B + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$**
- **vzdialenosť bodu $B[x_B, y_B, z_B]$ od roviny ρ: $ax + by + cz + d = 0$ je $|B; \rho| = \frac{|ax_B + by_B + cz_B + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$**

Matematické reprezentácie

vektor:

- ako množina všetkých orientovaných úsečiek s rovnakým smerom, veľkosťou a orientáciou
- ako reprezentácia posunutia
- ako usporiadaná dvojica/trojica čísel

priamka:

- parametrické vyjadrenie v rovine a **v priestore**
- smernicový tvar rovnice a súvis s grafom lineárnej funkcie
- všeobecná rovnica v rovine

rovina:

- **parametrické vyjadrenie**

Matematické modelovanie

- aplikácia vektorov a operácií s nimi pri riešení realistických úloh
- **riešenie metrických a polohových úloh využitím vhodne zvolených tvarov rovníc priamok a rovín**
- **riešenie úloh s matematickým, aj realistickým kontextom využívajúcich rovnicu kružnice**
- grafické znázornenie priamky a kružnice v súradnicovej sústave aj s využitím digitálnych nástrojov

Matematická komunikácia a argumentácia

- **zdôvodnenie vzťahov medzi smerovými a normálovými vektormi priamok a rovín, najmä pri určovaní ich rovnobežnosti, rôznobežnosti a kolmosti**
- **odvodenie súradníc bodu rozdeľujúceho úsečku v danom pomere**
- **argumentovanie výberu vhodného analytického vyjadrenia priamky alebo roviny v závislosti od typu úlohy a požadovaného postupu riešenia**
- **vysvetlenie prepojenia sústav dvoch/troch lineárnych rovníc s dvoma/troma neznámymi v rovine/priestore a ich grafickou reprezentáciou**

	- **všeobecná rovnica** kružnica: - stredový tvar rovnice kružnice		
	Postupy - určovanie súradníc bodov a vektorov a ich použitie pri riešení úloh v rovine **a priestore** - výpočet dĺžky úsečky a súradníc stredu úsečky - vykonávanie základných operácií s vektormi (súčet, rozdiel, násobenie číslom, skalárny súčin) a používanie skalárneho súčinu vektorov v úlohách - riešenie polohových úloh: vzájomné polohy bod a priamka, **bod a rovina, priamka a rovina,** dve priamky v rovine **a v priestore, dve roviny** - určenie vzdialenosti bodu od priamky **a roviny** - určenie veľkosti uhla dvoch nenulových vektorov pomocou skalárneho súčinu - rozhodnutie o kolmosti dvoch vektorov pomocou skalárneho súčinu - zostavenie stredovej rovnice kružnice ak sú známe súradnice stredu a polomer		

4. Základy formálnej matematiky

4.1 Výroky, kvantifikátory, úsudky	**Pojmy** **(úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)** - výrok, zložený výrok, úsudok, hypotéza, tvrdenie (pravdivé a nepravdivé), definícia - logické spojky, negácia, logické a, logické alebo (vylučovacie a nevylučovacie alebo), implikácia, ekvivalencia, **nutná a postačujúca podmienka** - obmena implikácie, obrátená implikácia - kvantifikátor, existenčný a všeobecný kvantifikátor	**Vzťahy** **(úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)** - implikácia $A \Rightarrow B$ je ekvivalentná s implikáciou $B' \Rightarrow A'$ - výroky A, B sú ekvivalentné, ak platia obe implikácie $A \Rightarrow B, B \Rightarrow A$ - pravdivosť konjunkcie, disjunkcie, implikácie, ekvivalencie a negácie - negácia konjunkcie, disjunkcie (De Morganove pravidlá) a implikácie - negácia všeobecného výroku (protipríklad) a existenčného výroku - negácia výrokov o počte objektov s danou vlastnosťou (typu „aspoň pre tri n platí...“)	
	Matematické reprezentácie - zápis výrokov, kvantifikátorov a logických spojok pomocou matematických symbolov - zápis pravdivostných hodnôt zložených výrokov do prehľadnej tabuľky - grafické znázornenie logických spojok a základných typov úsudkov pomocou množinových diagramov	**Matematické modelovanie** - prepis pravidiel zo života (zmluvy, zákony, pravidlá spoločenských hier) využitím logických spojok a kvantifikátorov a overenie ich splnenia - vyvodzovanie jednoznačných záverov postupným vylučovaním možností v logických úlohách s obmedzeným počtom parametrov (typu Einsteinove hádanky)	**Matematická komunikácia a argumentácia** - rozlíšenie platného a neplatného úsudku - odhalenie logických chýb (nesprávna negácia, zámena implikácie za ekvivalenciu) - posúdenie správnosti tvrdení odvodených z jednoduchých návodov, odborných textov, nariadení a pravidiel

		- **vytváranie podmienok pomocou logických spojok pri spracovaní údajov v tabuľkovom kalkulátore**	- vysvetlenie rozdielu medzi vylučovacím a nevylučovacím chápaním spojky „alebo“ na konkrétnych príkladoch - vysvetlenie rozdielov medzi definíciou a vetou, predpokladom a záverom vety - **rozlišovanie nutnej a postačujúcej podmienky v matematických tvrdeniach a formulovanie podmienok pomocou implikácie a ekvivalencie** - **vysvetlenie súvislostí medzi množinovými operáciami a logickými spojkami** - **vysvetlenie ekvivalencie implikácie a obmeny implikácie** - **argumentácia pravidiel pre negáciu jednoduchých, zložených a kvantifikovaných výrokov** - **vysvetlenie správnosti/nesprávnosti úsudku**
	Postupy - negácia výroku s kvantifikátormi vrátane zamlčaného všeobecného kvantifikátora - určenie pravdivosti zloženého výroku v konkrétnej situácii s najviac dvoma logickými spojkami		

4.2 Množiny a operácie s nimi	**Pojmy** **(úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)** - množina, prvok množiny - konečná, nekonečná, prázdna množina - podmnožina, disjunktné množiny - zjednotenie, prienik, doplnok, rozdiel - interval	**Vzťahy** **(úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)** - pre počet prvkov zjednotenia dvoch konečných množín A, B platí: $\|A \cup B\| = \|A\| + \|B\| - \|A \cap B\|$ - De Morganove pravidlá $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$	
	Matematické reprezentácie - reprezentácia množiny vymenovaním jej prvkov alebo určením jej charakteristickej vlastnosti - grafické znázornenie vzťahov medzi množinami pomocou Vennových diagramov - zápis intervalov pomocou symbolov a ich znázornenie na číselnej osi	**Matematické modelovanie** - použitie intervalov na vyjadrenie obmedzení a povolených hodnôt veličín v kontexte rôznych situácií - vyjadrenie a interpretácia viacerých podmienok pomocou prieniku, zjednotenia, rozdielu alebo doplnku množín a intervalov, vrátane filtrovania údajov pomocou digitálneho nástroja	**Matematická komunikácia a argumentácia** - vysvetlenie pojmov podmnožina, prienik, zjednotenie, rozdiel, doplnok množín na konkrétnych príkladoch - prepis textových podmienok obsahujúcich slová „a zároveň“, „alebo“, „okrem“ do množinových symbolov - vysvetlenie vzťahu pre počet prvkov zjednotenia dvoch množín

		- riešenie kontextových úloh o počte prvkov v skupinách na základe realistických údajov	- **vysvetlenie prepojení množinových operácií s konjunkciou, disjunkciou a negáciou výrokov** - **vysvetlenie súvislostí De Morganových pravidiel pre množiny s De Morganovými pravidlami pre výroky** - **argumentovanie platnosti De Morganových pravidiel pre operácie s množinami**
	Postupy - vykonanie operácií (prienik, zjednotenie, rozdiel, doplnok) s konkrétnymi množinami a intervalmi - určenie počtu prvkov zjednotenia a prieniku dvoch konečných množín v kontexte konkrétnych realistických situácií		

4.3 Základné typy dôkazov	**Pojmy** **(úroveň osvojenia a použitia bližšie špecifikovaná v matematických praktikách)** - protipríklad, priamy dôkaz, **nepriamy dôkaz, dôkaz sporom**		
	Matematická komunikácia a argumentácia - rozlíšenie medzi overením tvrdenia na konečnom počte príkladov a matematickým dôkazom platným pre všetky prípady - rozlíšenie medzi argumentáciou a dôkazom - identifikácia chybného alebo chýbajúceho kroku v predloženom odôvodnení - identifikácia chyby v úsudkoch a argumentácii - rozlíšenie významu pojmu dôkaz v matematike a v iných odboroch (právo, prírodné vedy, história), kde sa týmto slovom označuje zhoda indícií alebo experimentálne overenie - vysvetlenie úlohy protipríkladu pri dôkaze neplatnosti všeobecného tvrdenia - **vysvetlenie súvisu ekvivalentných a dôsledkových úprav rovníc a nerovníc s logickými vzťahmi ekvivalencie a implikácie** - **posúdenie správnosti argumentov generovaných aj umelou inteligenciou k tvrdeniam špecifikovaných v ďalších obsahových komponentoch** - **opis logických krokov pri priamom dôkaze, nepriamom dôkaze a dôkaze sporom a vysvetlenie na konkrétnom príklade**		